
Sistemas Dinámicos en Contexto

Carlos Mario Vélez S



Vélez-Sánchez, Carlos Mario

Sistemas dinámicos en contexto : modelación matemática, simulación, estimación y control con MATLAB / Carlos Mario Vélez-Sánchez – Medellín : Editorial EAFIT, 2024.
; 21.5 cm. -- (Cuadernos Z).

ISBN: 978-958-720-931-0

ISBN: 978-958-720-933-4 (versión PDF)

ISBN: 978-958-720-932-7 (versión EPUB)

1. Sistemas dinámicos. 2. Ecuaciones diferenciales. 3. Teoría de la estimación. 4. Sistemas no lineales. 5. MATLAB. I. Tít. II. Serie

510.285536 cd 23 ed.

V436

Universidad Eafit- Centro Cultural Biblioteca Luis Echavarría Villegas

Sistemas Dinámicos en Contexto

Primera edición: noviembre de 2024

© Carlos Mario Vélez S.

© Editorial EAFIT

Carrera 49 No. 7 sur – 50. Medellín, Antioquia

<http://www.eafit.edu.co/editorial>

Correo electrónico: obraseditorial@eafit.edu.co

ISBN: 978-958-720-931-0

ISBN: 978-958-720-933-4 (versión PDF)

ISBN: 978-958-720-932-7 (versión EPUB)

DOI: <https://doi.org/10.17230/978-958-720-931-0>

Edición: Editorial EAFIT

Corrección de textos: Daniela Álvarez

Diseño de carátula: Margarita Rosa Ochoa Gaviria

Imagen de carátula: Retrato de fase y puntos de equilibrio del modelo de un péndulo simple sin fricción viscosa

Universidad EAFIT | Vigilada Mineducación. Reconocimiento como Universidad: Decreto Número 759, del 6 de mayo de 1971, de la Presidencia de la República de Colombia. Reconocimiento personería jurídica: Número 75, del 28 de junio de 1960, expedida por la Gobernación de Antioquia. Acreditada institucionalmente por el Ministerio de Educación Nacional hasta el 2026, mediante Resolución 2158 emitida el 13 de febrero de 2018

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la editorial

Editado en Medellín, Colombia

Tabla de contenido

Nomenclatura	v
Prefacio.....	xiii
1 Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos.....	1
1.1 Introducción	1
1.2 Ecuaciones diferenciales de sistemas dinámicos lineales de tiempo continuo.....	6
1.2.1 Conceptos	6
1.2.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables.....	8
1.2.3 Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales	11
1.2.4 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden.....	14
1.2.5 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.....	15
1.3 Transformada de Laplace	20
1.3.1 Definición	20
1.3.2 Transformadas básicas	21
1.3.3 Propiedades operacionales	23
1.3.4 Transformada inversa de Laplace	24
1.4 Función de transferencia de tiempo continuo.....	26
1.4.1 Definición	26
1.4.2 Polos y ceros.....	29
1.4.3 Reducción del orden de la función de transferencia.....	37
1.5 Ecuaciones en diferencias de sistemas dinámicos lineales de tiempo discreto	40
1.5.1 Conceptos	40
1.5.2 Discretización o digitalización de señales	42
1.5.3 Solución iterativa	46
1.5.4 Solución analítica.....	47
1.6 Transformada z.....	50
1.6.1 Definición	50
1.6.2 Transformadas básicas	53
1.6.3 Propiedades operacionales	53
1.6.4 Transformada z inversa.....	55
1.7 Función de transferencia de tiempo discreto.....	55
1.7.1 Definición	55
1.7.2 Discretización de la función de transferencia	59
1.7.3 Interpretación de la función de transferencia	66
1.8 Ecuaciones en el espacio de estado.....	67
1.8.1 Conceptos básicos.....	68
1.8.2 Ecuación de estado a partir de la ecuación diferencial o en diferencias	74

1.8.3	Solución de la ecuación de estado homogénea lineal de tiempo continuo por valores y vectores propios	77
1.8.4	Solución de la ecuación de estado lineal de tiempo continuo por transformada de Laplace.....	82
1.8.5	Matriz de transición del estado y el método de las series de potencias.....	84
1.8.6	Discretización de la ecuación de estado de tiempo continuo.....	87
1.8.7	Transformaciones lineales y formas canónicas	91
1.8.8	Polos y ceros de sistemas MIMO a partir de la ecuación de estado.....	97
1.9	Relación entre representaciones de sistemas dinámicos	99
2	Modelación matemática y simulación de sistemas dinámicos	103
2.1	Introducción	103
2.2	Modelación y simulación de sistemas dinámicos.....	107
2.3	El enfoque de sistemas en la modelación y el control.....	115
2.4	Diagrama de bloques.....	122
2.5	Gráficos de flujo de señal.....	125
2.6	Diagramas de estado o simulación.....	127
2.7	Método numérico de Euler.....	130
2.8	Simulación de sistemas dinámicos con Simulink	134
2.9	Escalamiento o normalización de modelos	140
2.10	Análisis de sensibilidad e incertidumbre	142
2.10.1	Teoría de errores y aproximación	145
2.10.2	Análisis de incertidumbre por el método de Montecarlo.....	148
2.10.3	Análisis de sensibilidad global basado en la varianza.....	152
3	Análisis de sistemas dinámicos.....	163
3.1	Introducción	163
3.2	Retratos de fase y puntos de equilibrios.....	168
3.3	Características de los sistemas no lineales.....	176
3.3.1	No cumplimiento del principio de superposición	177
3.3.2	Tiempo de escape finito.....	178
3.3.3	Múltiples puntos de equilibrio aislados.....	179
3.3.4	Estabilidad local.....	179
3.3.5	Ciclo límite	179
3.3.6	Respuesta no sinusoidal a una entrada sinusoidal	180
3.3.7	Caos.....	182
3.3.8	Bifurcación	183
3.4	Linealización	185
3.5	Análisis de estabilidad.....	190
3.5.1	Definición de estabilidad	190
3.5.2	Método directo de Lyapunov para modelos no lineales.....	194
3.5.3	Método indirecto de Lyapunov para modelos no lineales	197

3.5.4	Método de Routh-Hurwitz para modelos lineales de tiempo continuo y tiempo discreto.....	198
3.5.5	Método de Jury para modelos lineales de tiempo discreto.....	205
3.5.6	Método del lugar de las raíces.....	210
3.6	Análisis temporal.....	214
3.6.1	Respuesta temporal de un sistema de primer orden.....	215
3.6.2	Respuesta temporal de un sistema de segundo orden subamortiguado.....	218
3.7	Análisis frecuencial.....	225
3.7.1	Definición	225
3.7.2	Diagrama de Bode o logarítmico	228
3.7.3	Características frecuenciales	235
3.7.4	Análisis de Fourier y el espectro de potencias	237
3.7.5	Filtro pasabajas	240
3.7.6	Análisis de estabilidad a partir del diagrama de Bode	242
4	Diseño de sistemas básicos de control lineal.....	248
4.1	Introducción	248
4.2	El problema y requerimientos de control	253
4.3	Control digital	257
4.4	El papel del integrador en la eliminación del error en estado estacionario en lazo cerrado.....	259
4.5	Control de asignación de polos y ceros por el enfoque polinomial.....	263
4.6	Controlador PID.....	267
4.7	Predictor de Smith.....	277
4.8	Saturación y transición suave entre los modos automático y manual	279
4.9	Control de asignación de polos por realimentación del estado para sistemas lineales invariantes en el tiempo	282
4.9.1	Ideas generales.....	282
4.9.2	Método para sistemas con una sola entrada	286
4.9.3	Método para sistemas con múltiples entradas	290
4.9.4	Control de asignación de polos por realimentación del estado con referencia y eliminación del error en estado estacionario	292
4.10	Controlabilidad y observabilidad	295
4.10.1	Controlabilidad de sistemas con una entrada.....	295
4.10.2	Observabilidad de sistemas con una salida.....	299
4.10.3	Controlabilidad y observabilidad al muestrear	301
4.10.4	Controlabilidad y observabilidad de sistemas con múltiples entradas y salidas	303
4.10.5	Interpretación de la controlabilidad y observabilidad – Formas canónicas	305
5	Identificación de sistemas dinámicos	308
5.1	Introducción	308
5.2	Objeto y método de la identificación de sistemas.....	314

5.3	Estructuras lineales discretas del modelo.....	321
5.3.1	ARX.....	328
5.3.2	ARMAX.....	329
5.3.3	OE.....	330
5.3.4	BOX-JENKINS.....	331
5.3.5	ARARX.....	333
5.3.6	Estructuras para modelos MIMO.....	333
5.4	Métodos no paramétricos de identificación de sistemas.....	336
5.4.1	Método de la respuesta temporal.....	337
5.4.2	Método de correlación.....	338
5.4.3	Método espectral.....	341
5.5	Métodos paramétricos para la estimación de parámetros.....	344
5.5.1	Método de mínimos cuadrados.....	344
5.5.2	Método de la variable instrumental.....	351
5.5.3	Método del error de predicción.....	355
5.5.4	Versión recursiva de los métodos paramétricos.....	363
5.6	Aspectos prácticos de la identificación de sistemas.....	367
5.6.1	Diseño de la entrada.....	367
5.6.2	Señales típicas de identificación.....	370
5.6.3	Preprocesamiento de datos.....	373
5.6.4	Selección del orden y el retardo.....	374
5.6.5	Validación con el coeficiente de determinación.....	376
5.6.6	Validación con análisis residual (prueba de blancura).....	377
5.6.7	Identificación en lazo cerrado.....	382
5.6.8	Intervalo de confianza de los parámetros.....	384
5.7	Estimación de parámetros de sistemas no lineales con modelos caja gris.....	387
6	Estimación del estado.....	390
6.1	Introducción.....	390
6.2	Observadores lineales de estado.....	393
6.3	Filtro de Kalman.....	397
6.4	Filtro extendido de Kalman.....	406
6.5	Aspectos prácticos de la implementación del filtro de Kalman.....	409
6.6	Filtro de Kalman conjunto para la estimación del estado y parámetros.....	411
7	Casos de estudio.....	415
8	Ejercicios resueltos.....	419
9	Ejercicios propuestos.....	422
	Referencias.....	424
	Índice.....	434

Nomenclatura

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$	Matrices del modelo continuo lineal en variables de estado. Dimensiones: $(n \times n), (n \times m), (p \times n), (p \times m)$
(A, B, C, D)	Polinomios de un modelo ARX, ARMAX, OE o Box-Jenkins
\mathbf{A}^{-1}	Inversa de la matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^T	Transpuesta de la matriz \mathbf{A}
$\underset{x}{\operatorname{argmin}} f(x)$	Valor de x que minimiza la función $f(x)$
C_r	Factor de cresta de una señal
$C_u(\tau)$	Autocovarianza de la variable $u(t)$: $C_u(\tau) = E[u(t) - \mu_u][u(t - \tau) - \mu_u]$ Coincide con la autocorrelación si la media es igual a cero
$C_{uv}(\tau)$	Covarianza cruzada de las variables $u(t)$ y $v(t)$: $C_{uv}(\tau) = E[\mathbf{u}(t) - \mu_u][\mathbf{v}(t - \tau) - \mu_v]^T$ Coincide con la correlación si las medias son iguales a cero
$\operatorname{cond}(\mathbf{A})$	Número de condición de la matriz \mathbf{A}
$d = \left\lfloor \frac{\tau}{T_s} \right\rfloor$	Retardo puro discreto de un sistema dinámico a partir del retardo continuo τ del modelo continuo
$\delta(t - \tau)$	Función delta de Dirac de tiempo continuo (definida en cada instante del tiempo en un intervalo determinado)
$\delta(k - n) \equiv \delta_{k,n}$	Función delta de Kronecker (δ_{kn}) o función impulso unitario de tiempo discreto
$\begin{cases} \Delta x_i = x_i - x_{i0} \\ \Delta u = u - u_0 \end{cases}$	Variables incrementales con respecto al punto de equilibrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$	Derivadas ordinarias de orden 1 y orden n con respecto al tiempo
$e(t), e(k)$	Ruido blanco dado por una secuencia de variables aleatorias independientes.
$e(t), e(k)$	Variable de error igual a la diferencia entre la variable de referencia y la variable de salida (variable controlada) de un sistema dinámico con realimentación: $e(t) = r(t) - y(t)$
$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$	Error en estado estacionario o valor final de la variable de error
$\varepsilon(t), \varepsilon(k)$	Error de predicción o innovación: $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$
$Ev(t), E[v(t)]$	Esperanza matemática de la variable aleatoria $v(t)$
$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \dots$	Matriz exponencial (es solo una representación y debe interpretarse como una serie infinita de potencias)
$f(t)$	Función de tiempo continuo (definida en cada instante del tiempo en un intervalo determinado)
$f(k), f(kT_s)$	Función de tiempo discreto (se puede omitir el período de muestreo T_s y asumir que está implícito)
$f_s = \frac{1}{T_s}$	Frecuencia de muestreo (Hz)
$f_X(x)$	Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X (PDF – “ <i>Probability Density Function</i> ”)
$F_X(x)$	Función de distribución (acumulada) de probabilidad de la variable aleatoria X
$\mathcal{F}\{u(t)\} = U(\omega)$	Transformada de Fourier
$\varphi(k), \varphi(t)$	Vector de regresión en la estimación con mínimos cuadrados
$\Phi(t) \equiv e^{\mathbf{A}t}$	Matriz de transición del estado, equivalente a la matriz exponencial

$(\Phi, \Gamma, \mathbf{C}, \mathbf{D})$	Matrices del modelo lineal discreto en variables de estado. Dimensiones: $(n \times n), (n \times m), (p \times n), (p \times m)$
$\Phi_u(\omega)$	Espectro de potencia o densidad espectral de potencia de la función $u(k)$
$G(s), G(z)$	Función de transferencia en la variable s o z (continua o discreta)
$\mathbf{G}(s), \mathbf{G}(z)$	Matriz de funciones de transferencia en la variable s o z (continua o discreta)
$G_{lc}(s), G_{lc}(z)$	Función de transferencia en lazo cerrado
$i = \sqrt{-1}$	Número imaginario
\mathbf{I}	Matriz identidad
$\text{Im}(\lambda)$	Parte imaginaria del número complejo λ
k	Variable de tiempo discreto $(kT_s, k = 0, 1, 2, \dots)$, donde el período de muestreo T_s está implícito. En ocasiones se toma $t = kT_s$
K	Ganancia constante
K_p	Constante de acción proporcional de un controlador PID
\mathbf{K}	Matriz de ganancias en un control estático de realimentación del estado
$\mathbf{K}(k)$	Ganancia o matriz de Kalman
$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Transformada de Laplace
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	Raíz característica o valor propio
m	Número de entradas de un sistema dinámico
\mathbf{M}_c	Matriz de controlabilidad
M_F	Margen de fase de un sistema dinámico
M_G	Margen de ganancia de un sistema dinámico
\mathbf{M}_o	Matriz de observabilidad

M_p	Sobreimpulso máximo de la respuesta temporal con oscilaciones de un sistema dinámico
M_r	Pico de resonancia de la respuesta frecuencial de un sistema dinámico lineal
$\mu_v = Ev(k)$	Esperanza matemática, valor esperado o media de la variable $v(k)$
n	Orden de un sistema dinámico (número de variables de estado)
na	Número de parámetros del denominador $A(q^{-1})$ de la función de transferencia discreta del modelo del proceso
nb	Número de parámetros del numerador $B(q^{-1})$ de la función de transferencia discreta del modelo del proceso
nc	Número de parámetros del numerador $C(q^{-1})$ de la función de transferencia discreta del modelo de la perturbación
nd	Número de parámetros del denominador $D(q^{-1})$ de la función de transferencia discreta del modelo de la perturbación:
nk	Retardo total discreto (orden relativo) de la función de transferencia: $nk = d + n_r \geq 1$
N_p	Número total de parámetros de una estructura de un modelo matemático
$n_r = n - m$	Orden relativo de un sistema dinámico (diferencia entre el número de polos y ceros finitos)
N	Número de datos en un experimento de estimación de parámetros
p	Número de salidas de un sistema dinámico
P	Período de una señal periódica
\mathbf{P}	Matriz de covarianzas: $\mathbf{P} = E(\mathbf{v} - \mu_v)(\mathbf{v} - \mu_v)^T$
\mathbf{v}_i	Vector propio correspondiente al valor propio λ_i : $\lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{A} \mathbf{v}_i$

pe	Orden de excitación persistente de una señal
q, q^{-1}	Operadores de desplazamiento hacia delante y hacia atrás
$r(t), r(k)$	Señal de referencia (<i>setpoint</i>) o señal deseada en un sistema en lazo cerrado. $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$
$R_u(\tau)$	Autocorrelación de la variable $u(t)$: $R_u(\tau) = Eu(t)u(t - \tau)$
$R_{uv}(\tau)$	Correlación cruzada de las variables $u(t)$ y $v(t)$: $R_{uv}(\tau) = Eu(t)v(t - \tau)$, donde $R_{uv}(\tau) = R_{uv}(-\tau)$
$\text{Re}(\lambda)$	Parte real del número complejo λ
R_y^2	Coefficiente de determinación de la variable y
$\text{rank}(\mathbf{A})$	Rango de la matriz \mathbf{A}
$s = i\omega$	Variable compleja de la transformada de Laplace
$\sigma_u^2 = C_u(0)$	Varianza de la variable $u(k)$: $C_u(0) = E[u(t) - \mu_u][u(t) - \mu_u]^T$
σ_v	Desviación estándar de la variable $v(k)$
$t, t = kT_s$	Tiempo continuo o tiempo discreto (en ocasiones se usa t en lugar de k)
T_s	Período de muestreo (se omite el subíndice cuando no hay opciones de confusión con la constante de tiempo)
T	Constante de tiempo para un sistema equivalente de primer orden
\mathbf{T}	Matriz de transformación lineal o de similitud
T_d	Constante de tiempo derivativo de un controlador PID
T_i	Constante de tiempo integral de un controlador PID
t_p	Tiempo de pico de la respuesta temporal

t_r	Tiempo de crecimiento de la respuesta temporal
t_s	Tiempo de establecimiento de la respuesta temporal
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Traza de la matriz \mathbf{A}
τ	Retardo continuo de un sistema dinámico, el cual se introduce en la señal de entrada: $u(t - \tau)$
$\hat{\theta}, \theta_0$	Vector de parámetros estimados y exactos de un modelo matemático
$u_s(t - \tau) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$	Función escalón unitario o de Heaviside
$\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(k)$	Vector de entradas de tiempo continuo o discreto de dimensión $(m \times 1)$
$\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(k)$	Vector de perturbaciones o ruidos de la medida de dimensión $(p \times 1)$
$V(\mathbf{x})$	Función de Lyapunov
$V_N(\theta), V(\theta)$	Función de coste (se omite el subíndice cuando no hay opciones de confusión con otra función)
$\text{var } v = \sigma_v^2$	Varianza de la variable aleatoria v
$\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(k)$	Vector de ruidos de las variables de estado del sistema (perturbaciones no medibles, dinámicas no modeladas) de dimensión $(n \times 1)$
ω	Frecuencia angular de un movimiento periódico (rad/s)
ω_0	Frecuencia angular no amortiguada de un movimiento periódico (rad/s)
ω_B	Ancho de banda (rad/s) de la respuesta frecuencial de un sistema dinámico lineal
ω_{cf}	Frecuencia de cruce de fase (rad/s)
ω_{cg}	Frecuencia de cruce de ganancia (rad/s)
$\omega_N = \omega_s/2$	Frecuencia de Nyquist (rad/s)

ω_r	Frecuencia de resonancia (rad/s) de la respuesta frecuencial de un sistema dinámico lineal
$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s$	Frecuencia de muestreo (rad/s)
$\{x_1, \dots, x_n\}$	Conjunto de variables de estado
\tilde{x}_i, \tilde{u}_j	Variables escaladas (divididas por el máximo valor esperado de dicha variable)
$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(k)$	Vector de estados de tiempo continuo o discreto de dimensión $(n \times 1)$
$\mathbf{x}(0)$	Condición inicial del sistema dinámico de tiempo continuo o discreto
$\hat{\mathbf{x}}(k)$	Vector de estados estimados de dimensión $(n \times 1)$
$\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_0(k)$	Variables de estado en un punto de equilibrio del sistema dinámico de tiempo continuo o discreto
$\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(k)$	Vector de salidas o respuestas temporales de un sistema dinámico de dimensión $(p \times 1)$
$\hat{\mathbf{y}}(k), \hat{\mathbf{y}}(t)$	Vector $(p \times 1)$ de salidas o respuestas temporales estimadas de un sistema dinámico en el instante discreto k o t
$y(k+1), y(k+n)$	Diferencias finitas hacia delante de orden 1 y orden n
$y(k-1), y(k-n)$	Diferencias finitas hacia atrás de orden 1 y n
$y^*(t)$	Variable muestreada
$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$	Respuesta temporal en estado estacionaria o valor final de la salida $y(t)$
$z = e^{T_s s}$	Variable compleja de la transformada z
$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z)$	Transformada z
$\mathcal{Z}_m\{f(k)\}$	Transformada z modificada
ζ	Razón de amortiguamiento de un sistema dinámico lineal de segundo orden.

*

Símbolo de convolución: $f(t) * g(t)$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)}$$

Magnitud del número complejo $z = \alpha + i\beta$

$\|\mathbf{A}\|$

Norma de la matriz \mathbf{A}

Prefacio

El objetivo general del libro es identificar, enlazar y aplicar los principales conceptos, métodos matemáticos y herramientas de los sistemas dinámicos, la teoría de la estimación y los sistemas de control, por medio de la determinación matemática de las características básicas en problemas simples que permitan el desarrollo intuitivo de los temas, la determinación de las características complejas con ayuda de herramientas computacionales (MATLAB® y Simulink®) que integren los diversos métodos, y la aplicación a problemas de diversas áreas del conocimiento (sistemas en contexto).

El área de los sistemas dinámicos ha penetrado prácticamente en todas las áreas de la ciencia y la tecnología, dado que permite abordar y manejar sistemáticamente aspectos de análisis, diseño, optimización y control. El área es transversal, por aplicarse a diferentes tipos de sistemas, y genérica, en cuanto a que utiliza métodos, técnicas y tecnologías de varias áreas de conocimiento bajo un enfoque sistémico basado en el modelo matemático. Un **sistema** se define como un conjunto de elementos unidos y en interacción (no necesariamente con un objetivo definido), y puede aplicarse a fenómenos materiales o abstractos (físicos, químicos, biológicos, ecológicos, económicos, sociales, matemáticos, entre otros). Todos los sistemas están compuestos por elementos, tienen una estructura, tienen sinergia e interactúan con su entorno.

El **enfoque de sistemas** es un estudio interdisciplinario que proporciona una visión general para la solución integrada y holística de problemas de diversa naturaleza, con un énfasis en los patrones de cambio e interacciones, y la integración y transferencia de conocimientos, conceptos y principios de diversas áreas, reduciendo la duplicación del esfuerzo teórico. Un **principio** es una proposición o verdad fundamental aceptada a partir de la cual se inicia el estudio de las ciencias o las artes; son leyes de la naturaleza que no se pueden demostrar explícitamente, pero que se pueden medir y cuantificar observando los resultados que producen. La teoría de los sistemas dinámicos se integra en la **cibernética**, es decir, en la ciencia dedicada al estudio de los métodos de **comunicación** (transmisión y recepción de información mediante un código común entre el emisor y el receptor), control y autoorganización comunes a máquinas y organismos vivos. La **información**, por su parte, es un conjunto de datos organizados y correlacionados que se generan, almacenan, analizan,

interpretan o transmiten para formar un mensaje que reduce la incertidumbre y cambia el estado de conocimiento del receptor; un dato aislado no es información, como tampoco lo son datos no relacionados; para que aparezca la información debe haber un enlace entre los fragmentos de los datos.

En el estudio de los sistemas dinámicos, es importante tener en cuenta que, aunque la mayoría de los sistemas dinámicos incluyen señales **estocásticas** (comportamiento aleatorio o al azar), una práctica común y exitosa consiste en considerar que los sistemas dinámicos son **determinísticos** (comportamiento que no depende del azar) y tratar las señales desconocidas e impredecibles como perturbaciones, analizando el impacto de las perturbaciones por medio de la simulación. En este contexto, un **proceso** es una operación o desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden uno al otro en una forma relativamente fija y conducen a un resultado o propósito determinados; es el sistema sobre el cual se concentra un estudio. Una **señal** es la representación física de una variable; a una señal le corresponde una variable y viceversa, por lo que en la mayoría de los casos pueden considerarse equivalentes y solo se diferencian por el contexto (señal en diagramas de flujo y variable en expresiones matemáticas).

Una **perturbación** es una variable externa determinística o aleatoria, medible o no medible, no deseada y no manipulable, aplicada a un sistema y que afecta adversamente su comportamiento. A diferencia de una perturbación (aplicada en el canal de entrada), un **ruido** afecta una medición de una variable (canal de salida), mas no al sistema mismo. La relación señal/ruido es la relación que hay entre la potencia de la señal que se transmite y la potencia del ruido indeseado (también se puede dar como una relación ruido/señal); una relación ruido/señal pequeña minimiza el impacto negativo del ruido.

De otro lado, la mayoría de los sistemas dinámicos son no lineales, es decir, no cumplen con el principio de superposición (sección 3.3.1) y no cuentan con métodos y herramientas de simple aplicación, por lo que el enfoque de aproximación lineal es ampliamente utilizado en ingeniería al generar modelos simples sobre los cuales se aplican métodos matemáticos muy bien definidos y exactos. La obtención de modelos matemáticos lineales en cierto intervalo de operación se realiza por medio de una operación llamada linealización (sección 3.4). En este libro se parte de una visión no lineal, pero se aplican métodos lineales en el análisis y diseño que luego se verifican en simulación

sobre el modelo no lineal. Esta es una característica que no es común en los textos de sistemas dinámicos y sistemas de control.

En relación con el libro, entre sus características metodológicas están:

- Énfasis en una visión sistémica de los temas y problemas, lo cual facilita la integración de los métodos con aplicaciones concretas. Es decir, se presentan los temas haciendo énfasis en los aspectos genéricos de un sistema específico en vez de sus particularidades.
- Enfoque desde los sistemas no lineales, llegando finalmente a soluciones lineales importantes para todo ingeniero, pero volviendo al contexto no lineal de donde provienen, es decir, el análisis y diseño lineales se prueban sobre el sistema no lineal, generalmente en simulación. El enfoque no lineal es fundamental en la mayoría de los casos de estudio del capítulo 7.
- Solución y verificación [1] de problemas con MATLAB (para la implementación de los algoritmos) y Simulink (para la simulación), con los respectivos archivos disponibles en el sitio web del libro [2]. El uso de MATLAB obedece a que el código es casi un **pseudocódigo** (lenguaje sencillo, informal y cercano al lenguaje coloquial que no puede ejecutarse en un computador, pero sí en el papel) y permite concentrarse en los aspectos de la implementación más que en los detalles del lenguaje y su compilación. Además, existe software alternativo y gratuito de MATLAB que se puede usar en muchos casos (Octave, Scilab). El uso de Simulink se justifica por la simplicidad para obtener diagramas bien documentados y con la posibilidad de separar el método numérico de la idea misma del modelo; de hecho, Simulink puede utilizarse como una herramienta visual de programación y a partir de sus diagramas se puede generar código en C y otros lenguajes, permitiendo incluso su uso en esquemas de control en tiempo real de procesos reales, donde el diagrama de Simulink se convierte en la interfaz gráfica de usuario. En este libro se utiliza la versión 2022b de MATLAB, por lo que el lector debe revisar los cambios correspondientes a las nuevas versiones y estar atento a las novedades en el blog del libro. El código presentado es simple y sin mucha documentación, para que el lector lo tome como punto de partida para la comprensión de la teoría. De este modo, el lector debe documentar cada programa.

- Énfasis en los conceptos y métodos de áreas afines (investigación, ciencia, pensamiento sistémico, matemáticas, educación), los cuales se introducen brevemente en el libro y se profundizan en la web del libro [2]. El lector debe revisar el índice al final del libro para identificar en que página se define un concepto.
- Enfoque basado en competencias de aprendizaje en la introducción de los temas y en la propuesta de ejercicios con diferentes niveles de desempeño, con el desarrollo de diferentes tipos de **pensamiento matemático** (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional) y de **procesos generales de la matemática** (solución de problemas, procedimientos matemáticos, modelación y simulación, comunicación de los resultados por medio de figuras y tablas adecuadas). Una **competencia de aprendizaje** es la capacidad de una persona para movilizar diversos tipos de recursos adquiridos (conocimientos, habilidades, actitudes, valores) para hacer frente a situaciones y contextos de la vida personal, social o laboral. Un **resultado de aprendizaje** se define en términos del nivel verificable y factible de conocimientos, habilidades y actitudes al final de una actividad curricular específica en un módulo del curso (las competencias definen el nivel de desempeño general).
- [Casos de estudio](#) [3] de diversa naturaleza (sistemas dinámicos en contexto) en la web del libro (la descripción se da en el capítulo 7), de una manera que se integran diferentes temas y niveles de desempeño, enlazándolos con temas pasados (que permite el repaso y afianzamiento de competencias) y futuros (a modo de motivación). Los casos de estudio siempre incluyen pruebas de simulación en computador (capítulo 2) haciendo énfasis en asuntos de incertidumbre y sensibilidad en los parámetros (sección 2.10), de manera que se obtienen soluciones más útiles en la práctica y se está mucho más cerca de la implementación en el sistema real.
- [Ejercicios resueltos](#) [4] en la web del libro con aplicación del método de solución de problemas, de manera que se pueda profundizar en la aplicación de la teoría y mejorar las habilidades de solución de problemas y utilización de MATLAB. Los ejercicios están clasificados de manera que se identifica fácilmente el tema o temas que tratan.
- [Ejercicios propuestos](#) [5] y [prácticas con MATLAB](#) [6] en la web del libro, con una formulación que integra la teoría, el procedimiento de

solución de problemas, la verificación [1] con MATLAB y la adecuada interpretación de resultados. No se indica la solución de cada problema, dado que se exige su verificación con MATLAB. Los ejercicios están clasificados de manera que se identifica fácilmente el tema o temas que tratan.

- [Sitio web del libro](#) [2], el cual incluye recursos sobre cada tema del libro: espacio para formular preguntas y proponer respuestas, ejercicios resueltos y propuestos, prácticas con MATLAB, programas y recursos de MATLAB y Simulink, línea histórica de los sistemas dinámicos y sus temas afines dentro del contexto de la matemática, la ciencia, la tecnología, la computación y la teoría de sistemas.

Para abordar este libro es necesario comprender los conceptos y métodos básicos del álgebra básica, trigonometría, álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables y números complejos. Adicionalmente, el lector debe manejar los elementos básicos de programación. Dada la importancia de las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace, en el libro hay una sección donde se resumen sus principales conceptos y métodos descritos en términos de la variable independiente t (tiempo) y no la variable x , como sucede en los libros clásicos de ecuaciones diferenciales.

La introducción de cada capítulo contiene las ideas generales y prerequisites, un resumen de cada uno de los temas, preguntas generales, la competencia específica de aprendizaje del capítulo y los respectivos resultados de aprendizaje. Los ejercicios propuestos del capítulo 9 contienen problemas simples para su solución analítica y ejercicios un poco más complejos que integran varias competencias y requieren del uso de MATLAB. Se pide al lector aplicar la técnica de la solución de problemas y enlazar la teoría con los procedimientos computacionales (programas de MATLAB) para su mejor comprensión.

La **solución analítica** de un problema matemático es una expresión matemática explícita en términos de funciones conocidas, la cual se obtiene aplicando de manera lógica ciertas operaciones específicas. La **solución numérica** es una solución en forma de números presentados por medio de gráficos o tablas. El análisis de la solución numérica se *circumscribe solo a los valores específicos de los parámetros*, es decir, solo se puede afirmar que un parámetro afecta cierta característica de un sistema si se cambia en cierto intervalo de estudio. La principal ventaja de la solución analítica sobre la

numérica es su capacidad de generalizar los resultados sin tener que probar diversos escenarios; por ejemplo, la solución analítica de una ecuación diferencial muestra directamente el efecto de cada parámetro.

La **solución de problemas** es el proceso de diseño, evaluación e implementación de una estrategia para responder una pregunta abierta o lograr el objetivo deseado. Pasos del método de solución de problemas, el cual se puede ajustar a un formato **IMRAD** (*Introduction, Methods, Results, And Discussion*) [7]: 1) Planteamiento y comprensión del problema (INTRODUCCIÓN). 2) Plan de solución (MÉTODOS). 3) Cálculo de la Resultados (solución). 4) Verificación [1] e interpretación de la solución (DISCUSIÓN).

Las competencias genéricas para afianzar en este libro son:

1. Aplicar conceptos y métodos matemáticos para representar y comprender mejor los sistemas dinámicos, problemas y procedimientos en distintos contextos y considerando sus características y propiedades.
2. Resolver problemas con un enfoque formal para una mejor comunicación y argumentación de los resultados obtenidos, por medio de la documentación de cada uno de sus pasos en un formato **IMRAD** [7], de manera que se pueda organizar adecuadamente la información, separando el problema, los métodos (propios o de otros autores) y los resultados originales (resultados). La discusión se centra en la **interpretación** de los resultados, es decir, en la explicación o traducción del sentido y principios fundamentales de algo en un lenguaje diferente al original, de manera fiel y en un contexto o marco específico que la limita. A partir de una adecuada interpretación se da respuesta a preguntas del tipo “por qué”, es decir, se da sentido e importancia a los resultados observados: *identificar con la razón lo que los ojos no ven*. El conocimiento implica, de esta manera, la representación e interpretación de los hechos observados con una reducción de los errores e ilusiones inherentes a dicho proceso. No se debe confundir la interpretación con la **descripción** (proceso de obtención de las características relevantes y distintivas de algo o alguien de manera detallada y ordenada con un lenguaje apropiado y sin entrar en las relaciones de los componentes y relaciones causa-efecto).
3. Aplicar herramientas computacionales para la solución de problemas, por medio del desarrollo de algoritmos y simulaciones documentados, claros y simples en **MATLAB**.

4. Aplicar el pensamiento sistémico en la modelación matemática y estructuración de problemas (sección 2.3) y sistemas para identificar aspectos comunes con otros modelos similares, por medio de diagramas de bloques de los sistemas con identificación de variables y parámetros. Un **parámetro** es una magnitud física constante que determina la estructura de un sistema mediante su valor numérico y que lo distingue de otro semejante, por lo que los parámetros determinan cómo las entradas se transforman en salidas; en un modelo matemático, estos son los valores que no son variables. Una **magnitud física** es una propiedad física que puede medirse (constante o variable).

Las competencias específicas para desarrollar en este libro son:

1. Formular diversas representaciones del modelo matemático de tiempo continuo y tiempo discreto de los sistemas dinámicos para comprender la influencia de los parámetros y condiciones iniciales en la forma de la solución y extraer información importante y diferente de cada una de ellas, por medio de su integración en la solución de problemas y casos de estudio.
2. Implementar programas y simulaciones en MATLAB y Simulink para la solución numérica y comprensión del **comportamiento** (secuencia de estados de un sistema) de sistemas dinámicos lineales y no lineales a partir de su modelo matemático, considerando las limitaciones del modelo y el papel de las incertidumbres del modelo, por medio de la planificación de los experimentos de simulación, la documentación y organización adecuada de los programas, y la interpretación correcta de los resultados.
3. Analizar el comportamiento de sistemas dinámicos no lineales de tiempo continuo y discreto alrededor de puntos de equilibrio de interés con diversos métodos matemáticos lineales, por medio de la linealización y la validación en simulación con el modelo no lineal. El análisis generalmente se basa en gráficos de la respuesta temporal o frecuencial del sistema ante diversas entradas, por lo que es muy útil saber bosquejarla antes de calcularla de manera exacta, lo cual demuestra una mínima comprensión del modelo. **Bosquejar** significa graficar aproximadamente la solución de un problema sin necesidad de utilizar las proporciones correctas, lo cual implica una comprensión adecuada de dicha solución.

4. Diseñar sistemas básicos de control lineal de tiempo continuo y discreto para el logro de requerimientos establecidos de comportamiento en lazo cerrado, por medio de métodos matemáticos y con la validación en simulación con el modelo no lineal.
5. Aplicar procedimientos y algoritmos de base matemática para la identificación de modelos matemáticos lineales y la estimación de parámetros de modelos lineales y no lineales, por medio de una adecuada planificación experimental que incluye el procesamiento de los datos experimentales, la selección de la mejor estructura del modelo, la selección del método de estimación, los cálculos con MATLAB, la validación de los resultados y la adecuada documentación del modelo obtenido y sus parámetros.
6. Diseñar un estimador del estado para la obtención de las variables desconocidas de un sistema dinámico no lineal cerca y lejos de un punto de equilibrio de interés y su uso en la implementación de sistemas de control, por medio de métodos matemáticos, implementación de algoritmos en MATLAB, pruebas en simulación sobre el modelo no lineal, y análisis y documentación de los resultados.

El libro puede utilizarse en un curso de introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias con orientación a las aplicaciones y a la motivación, siguiendo ideas como las presentadas en [8]: (i) hacer énfasis en las ecuaciones diferenciales de orden superior y la ecuación de estado, las cuales son más cercanas a problemas reales; (ii) resaltar la importancia de los cambios de variables y las formas canónicas; (iii) enlazar los problemas no lineales con su aproximación lineal por medio de la linealización; (iv) aplicar métodos numéricos y simulación; (v) utilizar el método de la transformada de Laplace en el marco de la función de transferencia y el teorema de convolución; (vi) presentar ejemplos reales o cercanos a la realidad, mostrando la fase de la modelación matemática, la relación sistémica y gráfica entre los subsistemas, el análisis dimensional y una introducción a la modelación experimental con métodos simples; (vii) enseñanza de conceptos claves como la relación entre el orden de la ecuación diferencial y el número de integradores (diagrama de simulación), el efecto de los polos y ceros, la estabilidad, la relación entre la ecuación no homogénea y las variables exógenas del sistema, la aplicación del teorema de convolución, la relación entre diferentes representaciones de un modelo (ecuación diferencial, ecuación de estado, función de transferencia), el análisis en el plano de fase, las características no lineales, las características

temporales y frecuenciales, entre otros; (viii) resaltar la importancia del análisis de incertidumbre y la teoría de errores y aproximación (sección 2.10.1) en los problemas reales.

Para terminar, el autor quiere agradecer a la Universidad EAFIT por su apoyo decidido a esta propuesta con las posibilidades que brinda de libertad de cátedra, descargas académicas para la preparación de material académico, períodos sabáticos y apoyo del Fondo Editorial. Igualmente, el autor agradece especialmente a los estudiantes de los cursos de Sistemas Lineales y Modelación Experimental del programa de Ingeniería Matemática, quienes a lo largo de más de 20 años le ayudaron a perfilar mejor los temas y orden del libro y a explicarlos de una mejor manera. Finalmente, el autor dedica este libro a Ami, Mario Alejandro y a todas las personas que lo han apoyado siempre con su amor y paciencia.

1 Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

1.1 Introducción

En este capítulo se presentan los principales métodos matemáticos para el estudio de los sistemas dinámicos. Algunos métodos, como las ecuaciones diferenciales ordinarias, la transformada de Laplace y la transformada z , se presentan de manera detallada en otros textos, pero aquí se dan únicamente los principales conceptos e ideas y se resuelven algunos ejercicios con el fin de tener acceso rápidamente a dichos métodos. No obstante, se invita a los lectores a recurrir a las referencias especificadas para profundizar en estos temas. Por el contrario, otros temas, como la función de transferencia y las ecuaciones en el espacio de estado, se presentan de manera extensa y completa. Si el lector conoce bien estos métodos matemáticos puede pasar al siguiente capítulo. Se recomienda al lector repasar los temas de álgebra elemental (polinomios, raíces de un polinomio, factorización), trigonometría, números complejos, cálculo diferencial, cálculo integral y álgebra lineal (determinantes, matrices, ecuaciones lineales, independencia lineal, valores y vectores propios, transformaciones lineales).

Un **sistema dinámico** es un sistema de tiempo continuo (o discreto) con un número finito de grados de libertad y que puede representarse matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales (o en diferencias) que dependen del tiempo. Un **grado de libertad** es cada uno de los movimientos básicos que definen completamente el cambio de un sistema. A cada grado de libertad le corresponde una variable. Por ejemplo, una partícula tiene seis grados de libertad (tres posiciones espaciales y tres velocidades de traslación); un cuerpo rígido tiene 12 grados de libertad (tres posiciones espaciales, tres posiciones de rotación, tres velocidades de traslación y tres velocidades de rotación); un ascensor tiene dos grados de libertad (una posición y una velocidad verticales); y un circuito eléctrico básico con un inductor y un capacitor tiene dos grados de libertad (corriente y voltaje).

La existencia de una ecuación diferencial (o en diferencias) asociada a un sistema, la necesidad de especificar ciertas condiciones iniciales o la

dependencia de los valores pasados de las variables, son indicios de que el sistema es **dinámico**; se dice en estos casos que el sistema tiene **memoria**. Un sistema dinámico se caracteriza por su modelo matemático, diferentes tipos de variables, parámetros, condiciones iniciales y perturbaciones. Lo contrario a un sistema dinámico es un **sistema estático**, un sistema continuo o discreto que se puede modelar matemáticamente por medio de ecuaciones algebraicas que relacionan directamente las salidas con las entradas. Si no hay necesidad de especificar condiciones iniciales ni una dependencia de los valores actuales de las variables de sus valores pasados, entonces el sistema es estático; se dice en estos casos que el sistema *no tiene memoria*.

Este capítulo inicia con un repaso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, cuya comprensión es la base para el estudio de los sistemas dinámicos. Aquí es necesario comprender muy bien lo que es la variable dependiente, la variable independiente, el término independiente, el orden de la ecuación, la solución de la ecuación homogénea (sin término independiente), la solución de la ecuación no homogénea (con término independiente), la solución general, la ecuación característica, las raíces características, la solución particular y el método de coeficientes indeterminados. Lo más importante es poder imaginar la forma de la solución de la ecuación diferencial a partir del valor de las raíces características y la forma del término independiente.

Luego se desarrolla el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de una manera análoga a las ecuaciones diferenciales utilizando los mismos conceptos y métodos, pero adaptados al caso discreto. Las ecuaciones en diferencias se obtienen al discretizar en el tiempo las ecuaciones diferenciales ordinarias con el fin de implementarlas en un computador digital. Aunque, en general, se recurre a la solución iterativa de las ecuaciones en diferencias por su facilidad para implementarse en un computador digital, se presenta también la solución analítica exacta para comprender mejor la forma de las soluciones. De esta manera, con la visión de la solución de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias lineales se tiene allanado gran parte del camino para el estudio de los sistemas dinámicos. Es importante resaltar que en el libro se desarrollan de manera paralela los métodos para sistemas de tiempo continuo y tiempo discreto dado que, en general, los métodos son equivalentes. No es necesario, por lo tanto, como se hace en otros textos, desarrollar primero el enfoque continuo y luego el discreto.

Existen diferencias entre una señal de tiempo discreto y una señal digital, y un proceso de discretización y uno de digitalización, pero en la práctica ambos conceptos se toman como equivalentes y solo se especifican mejor cuando es necesario. De hecho, en el Diccionario de la Real Academia Española solo aparece la palabra “digitalizar” y no aparece la palabra “discretizar”. En control, se puede discretizar un diseño final continuo o realizar un diseño basado en la discretización del modelo del proceso. En el primer caso (método indirecto), el diseñador trabaja siempre en tiempo continuo y al final, si se requiere una implementación discreta, discretiza la solución que obtuvo (los resultados deseados son muy parecidos si el período de muestreo es bastante pequeño). En el segundo caso (método directo), el diseñador discretiza el modelo del proceso (con un período de muestreo adecuado y correcto, no necesariamente demasiado pequeño) y realiza todo el proceso de diseño y análisis a partir del modelo discretizado; este es el mejor enfoque y el que brinda mayores posibilidades al diseñador. En la sección 1.5.2 se discute la correcta selección del período de muestreo.

Más adelante se presentan los temas relacionados con la transformada de Laplace (para resolver modelos continuos lineales con coeficientes constantes e interpretar el comportamiento en términos de la frecuencia) y la transformada z (para resolver modelos discretos lineales con coeficientes constantes e interpretar el comportamiento en términos de la frecuencia). Estas dos transformadas son la base de la función de transferencia. Como se verá, estos métodos permiten resaltar de manera explícita algunas características del modelo (como los polos y ceros) y resolverlo de una manera más simple. También se muestra la relación entre las variables s y z para enlazar las características del espacio continuo y el discreto.

Finalmente, se explica la representación en el espacio de estado, el método más completo de modelación matemática y la base de los temas de simulación del Capítulo 2 (Modelación matemática y simulación de sistemas dinámicos). En el espacio de estado se obtienen la mayor información posible de un sistema dinámico. Aunque se presenta el método para sistemas no lineales, el énfasis se hace en el caso lineal, el cual se relaciona directamente con la función de transferencia y las ecuaciones diferenciales ordinarias. Los diferentes métodos de modelación matemática se deben utilizar adecuadamente para aprovechar lo mejor de cada uno, por lo que su equivalencia se muestra al final del capítulo. Sin embargo, es importante

aclarar que de los tres métodos de modelación solo la función de transferencia es específica para sistemas lineales.

A pesar del fuerte componente matemático de este capítulo, el lector debe verlo como una oportunidad para repasar conceptos y métodos estudiados previamente, pero ahora enlazados con otros temas e incorporados en métodos computacionales y en simulaciones. Además, cada concepto puede tener ahora mucho más sentido que antes. Por ejemplo, la transformada de Laplace en el contexto de la función de transferencia tendrá más sentido al evidenciar muchas características importantes de los sistemas dinámicos; las raíces características ahora permiten visualizar la forma de la respuesta temporal de un sistema dinámico; la importancia de las transformaciones lineales se observa al resolver ecuaciones de estado desacoplando las variables.

De esta manera, se invita al lector a pensar en respuestas tentativas a las siguientes preguntas:

- ¿Qué aporta la matemática en el estudio de los sistemas dinámicos?
- ¿Por qué existen diferentes enfoques de modelación matemática de sistemas dinámicos y qué ventajas tiene cada uno?
- ¿Por qué no se pueden resolver analíticamente todas las ecuaciones diferenciales no lineales y qué implicaciones tiene esta realidad?
- ¿Por qué es importante representar matemáticamente sistemas dinámicos de tiempo continuo y tiempo discreto, y cómo se relacionan ambos modelos?
- ¿Qué representa físicamente el orden de una ecuación diferencial y, por lo tanto, del sistema dinámico, y qué significa que un sistema se pueda representar por modelos de orden diferente?
- ¿Qué representa físicamente el retardo de un sistema dinámico y cómo se modela matemáticamente?
- ¿Cuáles son las ventajas de la modelación de sistemas dinámicos por medio de las ecuaciones en el espacio de estado y qué sentido tiene una variable de estado?
- ¿Por qué se deben resolver analíticamente los modelos lineales de sistemas dinámicos si existen herramientas computacionales que lo hacen de una manera muy eficiente?

Las competencias de aprendizaje del capítulo son:

- Aplicar conceptos y métodos matemáticos para representar y comprender mejor los sistemas dinámicos, problemas y

procedimientos en distintos contextos y considerando sus características, propiedades, ventajas y desventajas.

- Formular diversas representaciones de tiempo continuo y discreto de los sistemas dinámicos para comprender la influencia de los parámetros y condiciones iniciales en la forma de la solución y extraer información importante y diferente de cada una de ellas, por medio de su integración en la solución de problemas y casos de estudio.

Los resultados de aprendizaje que debe demostrar el lector al finalizar el capítulo son:

- Identifica las características de una ecuación diferencial lineal y su solución, con el fin de entender el comportamiento de un sistema dinámico de tiempo continuo.
- Identifica las características de una ecuación en diferencias y su solución, con el fin de entender el comportamiento de un sistema dinámico de tiempo discreto.
- Aplica las propiedades de la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales lineales, con el fin de resolverlas de manera rápida y eficiente y obtener la función de transferencia.
- Aplica la transformada z a la solución de ecuaciones en diferencias lineales, con el fin de resolverlas de manera rápida y eficiente y calcular la función de transferencia
- Identifica las características básicas de la función de transferencia de un sistema dinámico lineal de tiempo continuo o discreto, con el fin de entender algunas características básicas del sistema.
- Identifica las características básicas de las ecuaciones en el espacio de estado de un sistema dinámico lineal de tiempo continuo o discreto, para entender algunas características básicas del sistema.
- Discretiza modelos matemáticos de sistemas dinámicos lineales a partir de sus distintas representaciones, para conectar las ventajas de los enfoques de tiempo continuo y discreto.
- Relaciona los diferentes métodos matemáticos de modelación de sistemas dinámicos lineales, con el fin de encontrar sus características básicas desde diferentes puntos de vista.

1.2 Ecuaciones diferenciales de sistemas dinámicos lineales de tiempo continuo

1.2.1 *Conceptos*

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene derivadas [9]. Existen ecuaciones en derivadas ordinarias (**EDO**) y ecuaciones en derivadas parciales (**EDP**). Las **ecuaciones diferenciales ordinarias**, objeto de este libro, contienen derivadas ordinarias (dy/dt) y se aplican a sistemas con **parámetros concentrados** (no necesariamente constantes), es decir, a aquellos sistemas donde se puede considerar que un parámetro toma un valor puntual (masa, longitud, resistencia, tasa, etc.) que no cambia considerablemente durante el tiempo del estudio y no es necesario considerar su distribución en el espacio. La siguiente ecuación representa una ecuación diferencial ordinaria, donde y es la **variable dependiente**, t es la **variable independiente**, n es el **orden** de la ecuación diferencial (derivada de mayor orden en la ecuación) y f es una función que relaciona las variables y derivadas:

$$f\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} \quad (1.1)$$

Por ejemplo, la siguiente es una ecuación diferencial de tercer orden:

$$\ddot{y} + 3t(\dot{y})^2 + \cos y = \cos t$$

Una **variable** es una magnitud que cambia con el tiempo y puede tomar un valor cualquiera de un conjunto dado. Al término de la ecuación diferencial que no contiene la variable dependiente o sus derivadas se le llama **término independiente**. Por ejemplo, en la ecuación de arriba el término independiente es $\cos t$. Generalmente, el término independiente contiene la **entrada** del sistema, es decir, una variable exógena *manipulable* que se aplica para modificarlo de alguna manera. Se dice que un sistema dinámico es un **sistema autónomo** si no aparece de manera explícita la variable independiente; de manera similar, se dice que se tiene una **ecuación diferencial autónoma**. La solución de la ecuación diferencial corresponde a la **salida** del sistema, es decir, a la variable que representa un cambio observable y medible, generalmente como respuesta a una entrada.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser lineales o no lineales. Matemáticamente, una ecuación diferencial es lineal si cada uno de los términos que contiene la variable dependiente es de **grado 1**, lo que significa que, al quitar los coeficientes y las derivadas de cada término, la variable dependiente aparece aislada. En el ejemplo de arriba, en el segundo término, después de quitar la derivada, la variable dependiente y está elevada al cuadrado, por lo que ese término es de grado dos. En el tercer término, la variable dependiente está dentro de la función coseno, la cual se puede descomponer en una serie infinita de Taylor dada por la ecuación (3.4), por lo que el término es de grado infinito.

Físicamente, una ecuación diferencial es lineal si cumple con el principio de superposición (sección 3.3.1). Se puede determinar experimentalmente si un sistema estable es o no lineal aplicando una entrada constante, observando en qué valor se estabiliza, variando esa entrada constante y trazando una curva por medio de los puntos obtenidos: si es una línea recta, el sistema es lineal o lo es en una región determinada. Si el sistema es inestable es necesario estabilizarlo por medio de un controlador.

En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, estas pueden ser con coeficientes constantes (**lineal invariable en el tiempo**, *Linear Time Invariant*, **LTI**) o con coeficientes variables (**lineal variable en el tiempo**, *Linear Time Variant*, **LTV**), siendo las primeras las que se pueden resolver analíticamente en término de funciones elementales. Un sistema LTI es un sistema lineal en el cual ante una entrada con un retardo la salida es la misma sin retardo, pero desplazada en ese tiempo de retardo; es decir, la salida es la misma sin importar el momento en el que se aplica la entrada.

La solución analítica de la ecuación diferencial está dada por un conjunto de funciones *definidas en cierto intervalo* tales que al derivarlas satisfacen la ecuación diferencial. En las siguientes secciones se estudia la manera de resolver algunas ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones LTI siempre se pueden resolver y las ecuaciones LTV se resuelven por medio de series de potencias (no se estudian en este libro). No existen métodos generales para resolver las ecuaciones diferenciales no lineales y normalmente se obtiene solo la solución numérica.

1.2.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables

Muchos problemas se pueden modelar por medio de ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo que a continuación se presentan algunos casos especiales de ecuaciones lineales y no lineales. En el caso no lineal existen algunas formas especiales que se pueden resolver analíticamente (variables separables, lineales, exactas, por sustitución, de Bernoulli, etc.) pero solo algunas de ellas se presentan a continuación, con el objetivo de introducir las ideas generales. Un hecho importante a resaltar es que los métodos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales se aplican solo a modelos de primer orden, dado que siempre es posible reducir una ecuación diferencial de orden n a ecuaciones diferenciales de primer orden (sección 1.8.2). La forma general de una ecuación diferencial de primer orden es:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1.2)$$

En primer lugar, las ecuaciones diferenciales de primer orden con **variables separables** permiten reducir el problema a uno de integración con respecto a cada variable (el problema se reduce a la aplicación y buen manejo del cálculo integral):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = g(y)h(t) \quad (1.3)$$

La solución es:

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int h(t) dt + C_2$$

Dado que al integrar cada término se generan dos constantes arbitrarias, pero se pueden unir en una, la solución tiene una sola constante arbitraria. A dicha solución se le llama **solución general** y corresponde a una familia de soluciones:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t) dt + C \quad (1.4)$$

En la anterior solución no hay restricciones generales (en algunos casos la función no es integrable) sobre la forma de la función $f(y)$ y, por lo tanto, es

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

aplicable a modelos lineales o no lineales. Por ejemplo, sea la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y(y - 1)$$

La ecuación es no lineal debido a que hay un término de grado 2 (y^2), pero se puede resolver fácilmente:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int dt + C$$

Dado que en el numerador se tiene el producto de dos polinomios, se pueden aplicar las fracciones parciales:

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int dt + C, \quad \ln|y-1| - \ln|y| = t + C$$

Organizando y aplicando las propiedades de los algoritmos se obtiene:

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = t + C, \quad \frac{y-1}{y} = e^{t+C}, \quad 1 - \frac{1}{y} = Ce^t, \quad C \rightarrow e^C C \rightarrow -C$$

$$y = \frac{1}{1 + Ce^t}$$

Para comprobar que la solución es correcta se debe derivar y reemplazar en la ecuación diferencial. El siguiente código con la herramienta de matemáticas simbólicas de MATLAB (*Symbolic Math Toolbox*) permite encontrar la **solución simbólica** del problema:

```
syms y(t)
Dy = diff(y,t,1); ecu = Dy == y*(y-1); sol = dsolve(ecu)
```

La solución, equivalente a la obtenida analíticamente, es:

$$\text{sol} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{C_1+t} - 1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

El MATLAB entrega 3 soluciones, donde la segunda ($y = 0$) corresponde a una **solución singular** que no puede obtenerse de la solución general asignando un valor a la constante arbitraria C (al derivarla satisface la ecuación diferencial). Sin embargo, la tercera solución ($y = 1$) sí se obtiene de la solución general haciendo $C = 0$. El gráfico de una familia de soluciones para diferentes valores de la constante C (Fig. 1.1) se puede obtener a partir del siguiente código:

```
t = 0:0.01:10; % Definición de los instantes de t para el cálculo de la solución
hold on % Para retener en un solo gráfico varias curvas
for C = 1:1:10
    y = 1./(1+C*exp(t));
    plot(t,y)
end
xlabel('Tiempo'), ylabel('y(t)'), legend({'C=1','C=2','C=3','C=4','C=5','C=6','C=7','C=8','C=9','C=10'})
hold off % Para evitar que se sobrepongan otras figuras más adelante
```

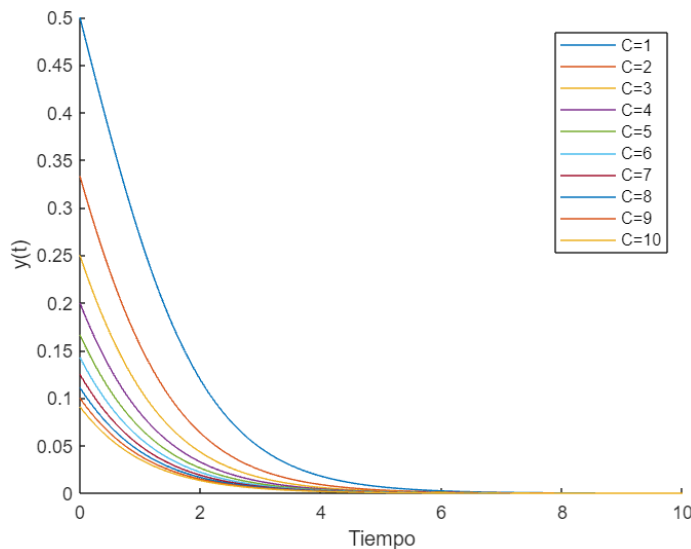


Fig. 1.1 Familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden

Las soluciones anteriores no se cruzan en ningún punto en el caso de ecuaciones de primer orden, dado que solo se tiene una constante arbitraria y esta se puede hallar dando en un punto los valores a las variables dependiente e independiente. Una práctica común consiste en utilizar como dicho punto

el valor en $t = 0$, es decir $y(0) = y_0$, a lo cual se le llama la **condición inicial**. La solución específica que pasa por el punto $y(0) = y_0$ se denomina **solución particular**. Al problema de hallar la solución general de una ecuación diferencial y luego, a partir de la condición inicial, hallar la solución particular, se le denomina el **problema de valor inicial**:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

En el ejemplo anterior, si $y(0) = 0.5$, entonces $C = 1$, como se observa en la figura de arriba:

$$0.5 = \frac{1}{1 + Ce^0}, \quad C = 1$$

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.25 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.1 en la web del libro.

1.2.3 Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales

Otro tipo especial de ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden resolver siempre son las ecuaciones lineales de primer orden, las cuales tienen la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = u(t) \quad (1.6)$$

Si $u(t) = b = \text{const}$ y $a(t) = a = \text{const}$, la ecuación es equivalente a una ecuación con variables separables:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + ay = b, \quad \int \frac{dy}{ay - b} = - \int dt, \quad \frac{1}{a} \ln|ay - b| = -t + C \\ y = \frac{b + Ce^{-at}}{a} \end{aligned}$$

Cuando $a(t) = a = \text{const}$ (la llamada **ecuación con coeficientes constantes**) se puede aplicar la teoría de la sección 1.2.5 (Ecuaciones

diferenciales lineales de orden superior). Si $a(t)$ depende del tiempo se tiene una **ecuación con coeficientes variables** y el método de solución es muy específico y se llama el **método del factor integrante**. En efecto, si se multiplica la ecuación (1.7) por una función $\mu(t)$, llamada el **factor integrante**, tal que el término de la izquierda es la derivada exacta de un producto, se tiene:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)u(t), \quad \frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)u(t)$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y$$

La derivada se cumple si:

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)a(t)$$

Resolviendo la anterior ecuación con variables separables se tiene (no es necesaria la constante arbitraria, dado que con cualquier valor el método funciona):

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int a(t)dt, \quad \mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

Por ejemplo, sea la siguiente ecuación lineal con coeficientes variables:

$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{y}{t} = 1, \quad a(t) = \frac{2}{t}, \quad u(t) = 1$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{2\int \frac{dt}{t}} = e^{2\ln t} = t^2$$

Multiplicando la ecuación por dicho factor:

$$\frac{dy}{dt}t^2 + \frac{2}{t}t^2y = t^2, \quad \frac{d(yt^2)}{dt} = t^2, \quad \int d(yt^2) = \int t^2dt + C$$

Integrando se obtiene:

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

$$yt^2 = \frac{t^3}{3} + C, \quad y = \frac{t}{3} + Ct^{-2}$$

Para hallar la solución particular no se puede dar una condición inicial con $t = 0$, pero sí en otro valor. Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{y}{t} = 1, \quad y(1) = 0$$

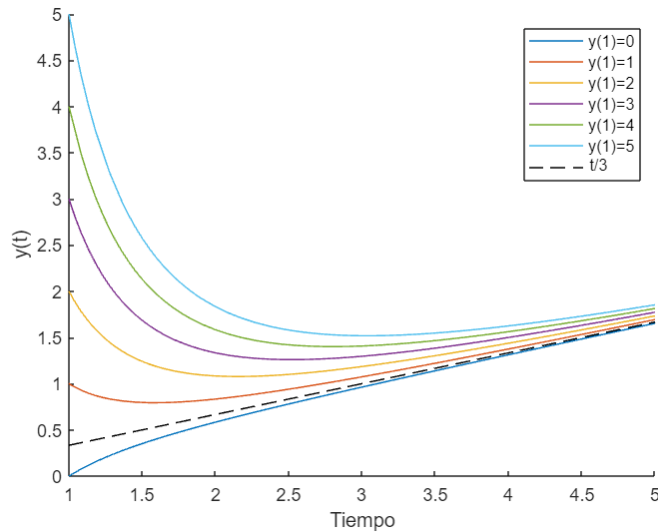
La constante arbitraria toma el siguiente valor:

$$0 = \frac{1}{3} + C1^{-2}, \quad C = -\frac{1}{3}$$

La solución particular es:

$$y(t) = \frac{t}{3} + Ct^{-2} = \frac{1}{3}(t + t^{-2})$$

Gráfico de la solución:



El siguiente código de MATLAB permite obtener la solución general, la solución particular y graficar la familia de soluciones que se dan arriba:

```
syms y(t)
Dy = diff(y,t,1); ecu = Dy + 2*y/t == 1; sol_gral = dsolve(ecu); ci = y(1) == 0; sol_par = dsolve(ecu,ci);
```

```

hold on
for i=0:5
    ci = y(1) == i; sol_par = dsolve(ecu,ci); fplot(sol_par)
end
xlim([1 5]), xlabel('Tiempo'), ylabel('y(t)'), legend({'y(1)=0','y(1)=1','y(1)=2','y(1)=3','y(1)=4','y(1)=5'})
hold off

```

La familia de soluciones se muestra en el gráfico de arriba, donde se observa que la solución pasa por la condición inicial y que con $t \rightarrow \infty$ la solución tiende a una función $t/3$.

Ver los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.1 en la web del libro.

1.2.4 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden

En el ejemplo de la sección anterior no se puede obtener una solución particular para una condición inicial del tipo $y(0)$, lo cual lleva a la necesidad de conocer de antemano las condiciones bajo las cuales un *problema de valor inicial* tiene solución y esta es única. Esa condición la da el **teorema de existencia y unicidad de Picard**, el cual establece la **condición suficiente**, mas no necesaria (si se cumple se garantiza que hay solución, pero de lo contrario no se sabe nada), para que el problema de valor inicial (1.5) tenga solución y sea única en una región cercana a t_0 : las funciones $f(t, y)$ y su derivada parcial $\partial f / \partial y$ deben ser continuas en una región D alrededor de (t_0, y_0) .

En el ejemplo mencionado, ninguna de las dos condiciones anteriores se cumple para el valor de $t_0 = 0$, por lo cual no puede garantizarse una solución en ese punto (la condición no es necesaria), pero sí en otros. En realidad, al resolver la ecuación se observa que en ese punto no existe una solución particular.

En otro ejemplo, sea la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ty^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

La función $f(t, y) = ty^{1/2}$ es continua en $t = 0$, pero $\partial f / \partial y = 0.5ty^{-1/2}$ no lo es, por lo que no se puede garantizar una solución única. La ecuación es de variables separables y su solución es $y = (x^2/4 + C)^2$, por lo que para $y(0) = 0$, $C = 0$ y se tiene una solución particular de la forma $y = x^4/16$. Dado que existe una solución, el teorema asegura que la solución no es única.

En efecto, $y = 0$ también es una solución, y no se obtiene de la solución particular; es decir, corresponde a una solución singular.

De otro lado, aunque el teorema especifica fácilmente si hay solución única, en la práctica la región D puede ser tan pequeña que el resultado puede carecer de valor. Por ejemplo, sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(t_0) = y_0$$

Dado que las funciones $f = t^2 + y^2$ y $\partial f / \partial y = 2y$ son continuas para cualquier valor de t y y , entonces el problema de valor inicial tiene solución única. Aunque no existe una solución analítica para el problema, sí se puede encontrar una solución numérica, la cual existe en un intervalo muy estrecho.

En general, si se observan comportamientos extraños en la solución numérica se debe probar con diferentes métodos numéricos y diferentes pasos del método para descartar problema de no existencia de la solución. No obstante, dado que los sistemas dinámicos reales a nivel macro siempre tienen un comportamiento único, es de esperar que sus modelos, si están bien planteados, tengan soluciones únicas; si no las tienen, eso puede ser un indicativo de una mala modelación matemática.

1.2.5 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

La siguiente expresión plantea un problema de valor inicial de una ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes (objeto de este libro), donde $u(t)$ es el término independiente, a_i son coeficientes constantes y y_{0i} corresponde a uno de los valores de las n **condiciones iniciales**:

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t) \\ y(0) = y_{01}, \dot{y}(0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{0n} \end{cases} \quad (1.7)$$

La **solución general** $y(t)$ de la ecuación diferencial ordinaria de orden superior, es decir, la función que satisface la ecuación diferencial consta de dos partes: la familia de soluciones $y_h(t)$ de la **ecuación homogénea** ($u = 0$) con constantes arbitrarias c_i , llamada **solución complementaria**, y una solución $y_{nh}(t)$ de la **ecuación no homogénea** ($u \neq 0$) que depende de la forma del término independiente específico $u(t)$:

$$y(t) = y_h(t) + y_{nh}(t) \quad (1.8)$$

La solución general, la cual contiene n constantes arbitrarias, es la familia de n soluciones linealmente independientes. Las funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son **linealmente independientes** si la siguiente expresión se cumple si y solo si $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \quad (1.9)$$

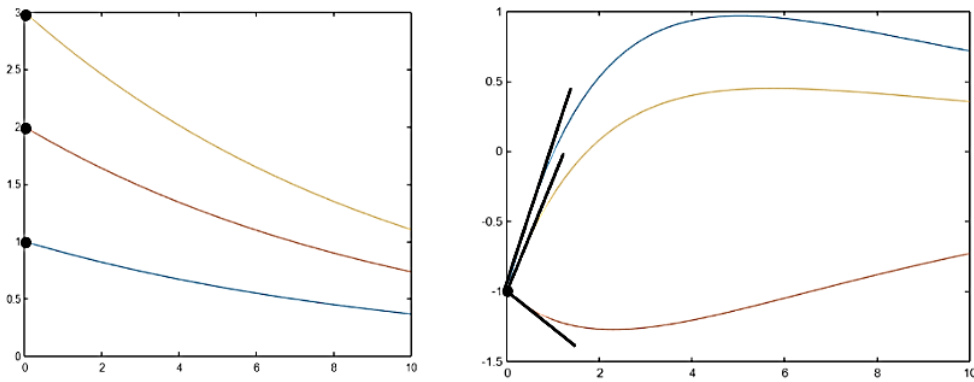


Fig. 1.2 Condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales de orden 1 (izquierda) y orden 2 (derecha)

Una solución particular es una de las soluciones que satisface las condiciones iniciales: pasa por un punto determinado $y(0)$ y en ese punto tiene una pendiente $\dot{y}(0)$, una concavidad $\ddot{y}(0)$ y así sucesivamente hasta la derivada $(n - 1)$. Por ejemplo, en la Fig. 1.2 se muestra que una ecuación diferencial de orden 1 tiene una familia de soluciones que pasan todas por distintos puntos, por lo que especificando un punto se selecciona la solución particular (no hay forma de que dos soluciones de una ecuación diferencial de orden 1 pasen por el mismo punto). De manera equivalente, una ecuación diferencial de orden 2 tiene dos familias de soluciones y muchas de ellas pasan por un mismo punto, pero ninguna tiene la misma pendiente en ese punto, por lo que es necesario indicar el punto por el que pasan y la pendiente en ese punto. Según el **teorema de existencia y unicidad** para ecuaciones lineales con coeficientes constantes, el problema de valor inicial para dichas ecuaciones

siempre tiene solución y es única para todo valor de la variable independiente t .

Para la solución de la ecuación homogénea se debe obtener la **ecuación característica** (1.10) y sus **raíces características**, la cual se obtiene buscando la solución en la forma $y = e^{\lambda t}$. Se presentan tres casos de raíces características: reales diferentes, complejas diferentes y raíces múltiples.

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1.10)$$

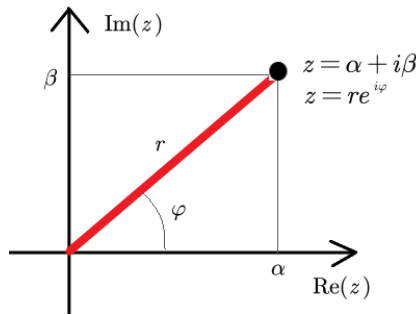


Fig. 1.3 Número complejo en coordenadas cartesianas (rectangulares) y polares

Los números complejos (\mathbb{C}) son la familia más grande de números, dado que contiene tanto los números reales (\mathbb{R}) como los números imaginarios (\mathbb{I}). Los números imaginarios surgen al obtener la raíz cuadrada de un número negativo: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ y se repite el ciclo. Un número complejo tiene parte real (α) y parte imaginaria (β): $z = \alpha + i\beta$. Los números complejos se pueden representar en coordenadas cartesianas ($z = \alpha + i\beta$) o polares ($z = r e^{i\varphi}$), tal y como se muestra en la Fig. 1.3.

De la Fig. 1.3 se tiene la relación entre las representaciones cartesianas y polares de un número complejo:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha} \quad (1.11)$$

$$\alpha = r \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \varphi \quad (1.12)$$

Por ejemplo,

$$z_1 = 1 + i, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha} = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$z = re^{i\varphi} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Sobre los números complejos se pueden realizar las operaciones aritméticas, para lo cual es suficiente considerar que $i = \sqrt{-1}$ es la representación de un número. En ciertas operaciones es útil utilizar la representación cartesiana y en otras la representación polar (en este caso es importante entender la función arctan y su signo).

Si $\lambda = \alpha \pm i\beta$ es un número complejo con multiplicidad m , entonces la solución de la ecuación homogénea está conformada por las siguientes funciones linealmente independientes y sus respectivas constantes arbitrarias (pueden deducirse de la expresión los casos de raíces reales e imaginarias):

$$y_h(t) = e^{\alpha t} \left[(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + t(c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t) + \dots \right. \\ \left. \dots + t^{m-1}(c_{2m-1} \cos \beta t + c_{2m} \sin \beta t) \right] \quad (1.13)$$

El número de constantes arbitrarias de la solución complementaria es igual al orden de la ecuación diferencial. Si una raíz característica tiene una multiplicidad m , entonces es necesario multiplicar por t^m para obtener soluciones linealmente independientes.

Se llama **conjunto fundamental de soluciones** al conjunto de n soluciones linealmente independientes de una ecuación homogénea de orden n . Un conjunto de soluciones es linealmente independiente en cierto intervalo (todo el eje real en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes) si y solo si el siguiente determinante, llamado el **wronskiano**, es diferente de cero:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \cdots & \dot{y}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.14)$$

Es importante anotar que si $\alpha < 0$ en la solución anterior, entonces se obtendrán soluciones $e^{-|\alpha|t}$ que desaparecerán en el tiempo, es decir, que convergen a un valor. Si todas las raíces cumplen con la condición anterior, entonces el sistema se considera asintóticamente estable (ver sección 3.5 para más detalles). Cuando hay raíces múltiples, la solución se multiplica por t^m , por lo que una solución sinusoidal o constante se puede volver inestable.

Para hallar la solución de la ecuación no homogénea se pueden utilizar dos métodos: el **método de coeficientes indeterminados** (método simple algebraico aplicable solo cuando se tiene un término que contiene un polinomio, una función exponencial, una función sinusoidal o un producto simple de ellos) o el **método de variación de las constantes** (método general, pero que requiere de integraciones). En el método de coeficientes indeterminados la solución particular tiene la misma forma del término independiente. Por ejemplo, si el término independiente es un polinomio la solución particular también será un polinomio del mismo grado con coeficientes indeterminados, y si el término independiente es una función sinusoidal la solución particular será una señal sinusoidal de cierta amplitud y fase (o una suma de una función seno y una función coseno con coeficientes indeterminados); en ambos casos se debe multiplicar por t^r para hallar soluciones linealmente independientes si la solución particular ya está en la solución general. Es decir, si el término independiente tiene la forma (1.15), entonces la solución de la ecuación no homogénea tiene la forma (1.16), donde A_n, B_n, P_n y Q_n son polinomios de grado mayor n (los dos primeros con coeficientes conocidos y los dos últimos con coeficientes indeterminados), y m es el número de veces que hay que multiplicar el término por t para que la solución resultante no esté dentro de la solución complementaria.

$$u(t) = e^{\alpha t}[A_n(t)\text{sen}\beta t + B_n(t)\text{cos}\beta t] \quad (1.15)$$

$$y_{nh}(t) = t^m e^{\alpha t}[P_n(t)\text{sen}\beta t + Q_n(t)\text{cos}\beta t] \quad (1.16)$$

El método anterior es difícil de aplicar al caso en el que el término independiente es una función definida por partes, dado que allí es necesario dividir la solución en diferentes fases, en cada una de las cuales la parte izquierda de la ecuación diferencial es la misma, pero el término independiente cambia y las condiciones iniciales en cada segmento

corresponden al valor de la solución anterior en ese instante de tiempo. En estos casos es mejor aplicar el método de la transformada de Laplace (sección 1.3). Para las funciones definidas por partes se utiliza la **función escalón unitario o de Heaviside**, dada por la siguiente expresión:

$$u_s(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases} \quad (1.17)$$

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.1 y 1.2 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.2 en la web del libro.

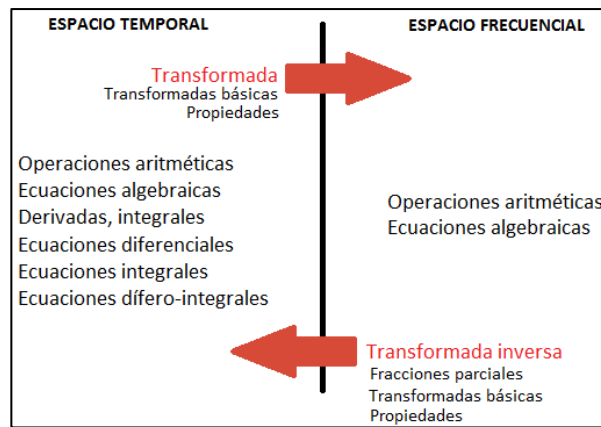


Fig. 1.4 Interpretación de la utilidad de la transformada de Laplace

1.3 Transformada de Laplace

1.3.1 Definición

La transformada de Laplace es una integral con ciertas propiedades que tiene aplicaciones como la solución de ecuaciones diferenciales y ecuaciones de estado lineales de tiempo continuo con coeficientes constantes de una manera simple al pasar del dominio del tiempo t al dominio de una variable compleja s . La siguiente expresión matemática define la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s), \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C} \quad (1.18)$$

El límite inferior tiene especial sentido para funciones discontinuas, dado que en sistemas dinámicos se considera que $f(t < 0) = 0$. La integral converge (condición suficiente mas no necesaria) cuando $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, se pueden encontrar valores de M y m de manera que $|f(t)| < Me^{mt}$. Por ejemplo, $f(t) = 1$ siempre está por debajo de cualquier función exponencial con $M > 1$ y su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

1.3.2 Transformadas básicas

Aplicando la definición se pueden obtener las transformadas de funciones como las dadas en la TABLA 1.1. Las otras transformadas se demuestran de manera similar y se pueden consultar en [9].

TABLA 1.1. TRANSFORMADAS BÁSICAS DE LAPLACE

$f(t)$	1	t^n	e^{at}	$\text{sen } at$	$\text{cos } at$	$\delta(t - \tau)$
$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s - a}$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$e^{-\tau s}$

La **función delta de Dirac** tiene un espacial uso e interpretación, dado que es una *función generalizada* (un tipo más general de función, dado que no se acoge a la definición convencional de función) que se define de la siguiente manera:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t \neq \tau \\ 0, & t = \tau \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

La función se puede entender mejor a partir del pulso que se muestra en la Fig. 1.5, donde la amplitud se hace cada vez mayor a medida que el ancho disminuye; la dimensión de $\delta(t)$ es la inversa de la dimensión de t : $[\delta(t)] = [t]^{-1}$. Dicha representación es útil para la aproximación cuando se usan métodos numéricos, aunque pueden utilizarse otras aproximaciones [10], como la distribución gaussiana. En dichas expresiones es importante resaltar la manera como la función utilizada depende del paso de la simulación numérica.

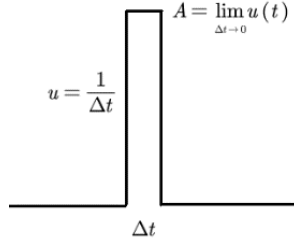


Fig. 1.5 Interpretación de la función delta de Dirac

Algunas propiedades de la función delta de Dirac, donde $u_s(t)$ es la función escalón unitario (discontinua), se dan a continuación:

$$\frac{du_s(t - \tau)}{dt} = \delta(t - \tau), \quad \delta(ct) = \frac{1}{|c|} \delta(t), \quad \delta(t) = \delta(-t)$$

Con base en las propiedades anteriores se tiene:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau}, \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

1.3.3 Propiedades operacionales

Aunque puede calcularse la transformada de Laplace utilizando siempre la definición, la fortaleza de la aplicación del método radica en la utilización de las transformadas básicas de la TABLA 1.1 y ciertas propiedades operacionales que se muestran en la TABLA 1.2, las cuales se obtienen a partir de la definición.

Por ejemplo, para el cálculo de la propiedad de traslación temporal, donde $u_s(t - \tau)$ es la función escalón unitario, se tiene:

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)u_s(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} f(t - \tau)u_s(t - \tau)e^{-st}dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-st}dt$$

Cambiando de variables $\theta = t - \tau$, $d\theta = dt$, con $\theta = 0$ cuando $t = \tau$, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t - \tau)u_s(t - \tau)\} &= \int_0^{\infty} f(\theta)e^{-s(\theta+\tau)}d\theta = e^{-\tau s} \int_0^{\infty} f(\theta)e^{-s\theta}d\theta \\ &= F(s)e^{-\tau s}\end{aligned}$$

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.26 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.6 en la web del libro.

TABLA 1.2. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propiedad	$f(t)$	$F(s)$
Linealidad	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$
Traslación compleja	$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$
Derivación	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0^-)$
Traslación temporal o real	$f(t - \tau)u_s(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
Integración	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, si existe	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Potenciación	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

1.3.4 Transformada inversa de Laplace

Para resolver ecuaciones diferenciales, integrales, dífero-integrales o sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con la transformada de Laplace, la idea es convertirlas a ecuaciones algebraicas en el espacio s utilizando las transformadas básicas y las propiedades que convierten una función $f(t)$ en una función $F(s)$, luego realizar las operaciones en el espacio s y de allí regresar al espacio t calculando la **transformada inversa de Laplace** $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, utilizando las mismas expresiones y propiedades básicas en sentido contrario, generalmente multiplicando o dividiendo por una constante y aplicando el método de fracciones parciales. La idea se muestra

en la Fig. 1.4. Las transformadas dadas en las tablas anteriores deben entenderse en ambos sentidos, es decir:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$$

La descomposición en fracciones parciales da:

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+3} = \frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{s^2+3}$$

De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+3)}\right\} &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{s^2+3}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{-t} - \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \sqrt{3}t\right) \end{aligned}$$

La transformada de Laplace normalmente es una fracción estrictamente propia, es decir:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

Si la transformada no es estrictamente propia, eso significa que en la función temporal respectiva hay una función delta de Dirac. Por ejemplo:

$$Y(s) = \frac{s}{s+1} = \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \leftrightarrow y(t) = \delta(t) - e^{-t}$$

En la sección 1.4 se aplica la transformada de Laplace a la modelación matemática de sistemas dinámicos.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.3, 1.4 y 1.5, y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.7 y 1.8 en la web del libro.

1.4 Función de transferencia de tiempo continuo

1.4.1 Definición

La función de transferencia para un sistema LTI (lineal invariable en el tiempo o lineal con coeficientes constantes) de tiempo continuo de una entrada y una salida (**SISO**, *Single Input Single Output*) es la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada suponiendo condiciones iniciales iguales a cero.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \Big|_{c.i.=0} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.20)$$

Aunque las ecuaciones diferenciales, en general, pueden tener condiciones iniciales arbitrarias, los sistemas dinámicos se estudian alrededor de puntos de equilibrio, donde las condiciones iniciales iguales a cero son naturales. En general, para una ecuación diferencial, $y(0) = y_0$ y las derivadas son iguales a cero (lo que corresponde a un punto de equilibrio), por lo que se puede tomar $y(0) = 0$ y sumarle el valor de y_0 a la respuesta final. Lo anterior equivale a una linealización, tal y como se explica en la sección 3.4. Si no se pueden asumir condiciones iniciales iguales a cero, entonces es necesario utilizar el modelo en el espacio de estado (sección 1.8) o dividir el problema en dos partes: hallar la solución con condiciones iniciales iguales a cero y luego sumarle un término de corrección tal y como se muestra en las ecuaciones (1.87) y (1.89). Por ejemplo, la función de transferencia de la siguiente ecuación diferencial puede obtenerse solo si se asumen condiciones iniciales iguales a cero:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y &= b_1\dot{u}(t) + b_2u(t) \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\} + a_1\mathcal{L}\{\dot{y}\} + a_2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{b_1\dot{u}(t) + b_2u(t)\} \\ s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + a_1[sY(s) - y(0)] + a_2Y(s) &= b_1[sU(s) - u(0)] + b_2U(s) \\ s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_2Y(s) &= b_1sU(s) + b_2U(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_1s + b_2}{s^2 + a_1s + a_2} \end{aligned}$$

La función de transferencia representa la relación entre las transformadas de la salida y la entrada, sin importar cual es la entrada, por lo que representa el sistema mismo. Dicha expresión corresponde a su vez a la relación de dos polinomios, cada uno de los cuales da información directa sobre el sistema. El polinomio denominador de la función de transferencia corresponde a la ecuación característica (el lector debe desarrollar la capacidad de ver una ecuación diferencial ordinaria a partir de la función de transferencia).

La función de transferencia puede ser una **fracción propia** (el grado del numerador es igual al grado del denominador) o una **fracción estrictamente propia** (el grado del numerador es menor que el grado del denominador). Los procesos continuos se modelan generalmente con fracciones estrictamente propias, mientras que las fracciones propias son comunes en el diseño de controladores; ambos casos corresponden a **modelos causales**.

La **causalidad** es una condición que relaciona dos o más acontecimientos de modo que uno causa o produce el otro (efecto). Una **fracción impropia** (el grado del numerador es mayor que el grado del denominador) no tiene significado físico y corresponde a un modelo no causal. En el caso de tiempo continuo, a una función de transferencia impropia le corresponde una ecuación diferencial que puede tener sentido, pero que presenta un problema: una función de transferencia impropia requiere de derivadores ($G(s) = s$) para su implementación, lo cual conlleva a que, ante una entrada escalón $u_s(t - \tau)$, la respuesta temporal tenga una salida tipo función delta de Dirac (sección 1.3) en el instante τ , y un valor infinito equivalente a un comportamiento inestable (en términos de polos y ceros de la sección 1.4.2, equivale a tener los polos faltantes en el infinito en el semiplano derecho). En definitiva, el problema del diferenciador se traduce en una implementación numérica de la derivada con diferencias finitas, por ejemplo, con los problemas de causalidad explicados anteriormente. El siguiente es un ejemplo de una función de transferencia impropia (donde surge un derivador) y su respectiva ecuación diferencial y ecuación en diferencias no causal:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{s+1} = s - 1 + \frac{1}{s+1}$$

La respectiva ecuación diferencial es:

$$\dot{y} + y = \ddot{u}$$

Discretizando se obtiene la siguiente ecuación en diferencias no causal:

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T_s} + y(k) \simeq \frac{u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)}{T_s^2}$$

Los siguientes son ejemplos de funciones de transferencia con su respectiva ecuación diferencial o en diferencias, donde se puede observar que un polinomio de grado mayor o igual a uno aparece en el numerador cuando hay derivadas de la variable de entrada:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s(s^2+3s+3)}, \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 3y = \dot{u} + 1$$

Una vez conocida la función de transferencia se puede encontrar la respuesta temporal a cualquier tipo de entrada:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} \quad (1.21)$$

En el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo con m entradas y p salidas (**MIMO**, *Multiple Inputs Multiple Outputs*, **MISO**, *Multiple Inputs Single Output*, o **SIMO**, *Single Input Multiple Outputs*), la **matriz de funciones de transferencia** es la matriz de $(p \times m)$ que reúne el conjunto de todas las funciones de transferencia $G_{ij}(s) = Y_i(s)/U_j(s)$ para cada par “salida/entrada”, suponiendo que las demás entradas son iguales a cero:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Donde

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \quad \mathbf{Y}(s) = [Y_1(s) \quad \cdots \quad Y_p(s)]^T$$

$$\mathbf{U}(s) = [U_1(s) \quad \cdots \quad U_m(s)]^T$$

Una característica importante de muchos sistemas dinámicos es el **retardo**, es decir, el tiempo que tarda en responder un sistema dinámico a un estímulo. El retardo se incluye en los modelos de tiempo continuo como un número real τ . Las fuentes más comunes de retardo son: el tiempo requerido en la

medición y el transporte, el tiempo exigido para el análisis, el tiempo de cálculo y comunicación (en sistemas digitales) y la compensación cuando un modelo se aproxima por otro de menor orden. Los problemas de los sistemas con retardo incluyen el empeoramiento de la estabilidad y el análisis y diseño más complicados. En el caso de tiempo continuo, debido al término no polinomial $e^{-\tau s}$ (en el caso discreto este no es un problema), es más difícil obtener un control satisfactorio debido a la reducción de las ganancias de control.

Para modelar el retardo en el caso continuo es importante tener en cuenta las siguientes propiedades de la transformada de Laplace y transformada z:

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)u_s(t - \tau)\} = e^{-\tau s}F(s)$$

De esta manera, la función de transferencia con retardo toma la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} e^{-\tau s} \quad (1.23)$$

Se puede aproximar el retardo continuo τ utilizando series de potencia, siendo la **aproximación de Padé** la mejor opción. Dicha aproximación es útil en el análisis y diseño de controladores, dado que el término de retardo se transforma en una expresión racional de un mejor manejo algebraico. La aproximación de Padé de primer orden del retardo tiene la siguiente forma:

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (1.24)$$

Ver los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.13 y 1.14 en la web del libro.

1.4.2 Polos y ceros

La función de transferencia permite definir de manera clara información del sistema dinámico, como las raíces características y el retardo. En el lenguaje de la función de transferencia, a las raíces del polinomio denominador (raíces características) se les llama **polos**, siendo este el nombre más general para

dichos valores. El orden de un sistema es igual al número de polos. En otras palabras, los polos p_i son los valores que satisfacen los siguientes límites:

$$\lim_{s \rightarrow p_i} G(s) = \infty \quad (1.25)$$

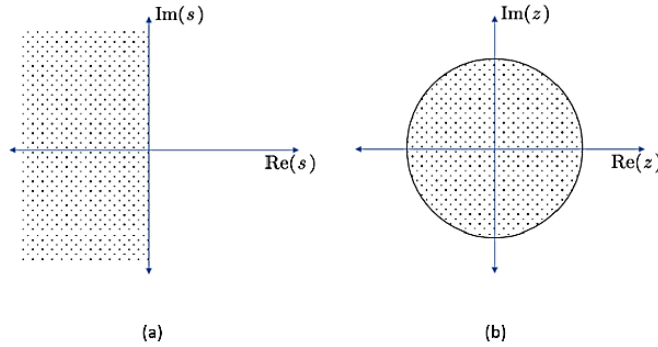


Fig. 1.6 Región de estabilidad de sistemas lineales de (a) tiempo continuo y (b) tiempo discreto

Los polos determinan la estabilidad del sistema, de manera que para un sistema de tiempo continuo la estabilidad se logra si todos los polos tienen parte real negativa (están en el **semiplano izquierdo**), mientras que en el caso discreto deben tener un módulo menor que uno (están dentro del **círculo unitario**), tal y como se muestra en la Fig. 1.6.

Lo anterior se observa al dar la solución a partir de las raíces características:

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t), \quad \alpha < 0$$

Entre más lejos a la izquierda del eje imaginario estén los polos del sistema de tiempo continuo más rápidamente desaparece el efecto de ese polo en la respuesta temporal. El **polo dominante** en un sistema estable es el polo más cercano al eje imaginario y el que determina el decaimiento más lento de la respuesta temporal. Los **polos insignificantes** son los polos alejados del eje imaginario entre 5 y 10 veces en relación con el polo dominante, y cuyo componente de la respuesta temporal decrece, y por lo tanto desaparece, rápidamente. La Fig. 1.7 muestra el comportamiento estable e inestable no oscilatorio y oscilatorio de acuerdo con la ubicación de los polos en el plano complejo de un sistema continuo, donde se observan las diferencias cuando

los polos se alejan del eje imaginario (mayor estabilidad si están en el semiplano izquierdo) y del eje real (mayor frecuencia de las oscilaciones si están en el semiplano izquierdo). En general, como se verá en la sección 3.5.6, la velocidad de convergencia crece con la distancia entre el polo dominante y el eje imaginario, mientras que la frecuencia de las oscilaciones crece con la distancia entre el polo y el eje imaginario.

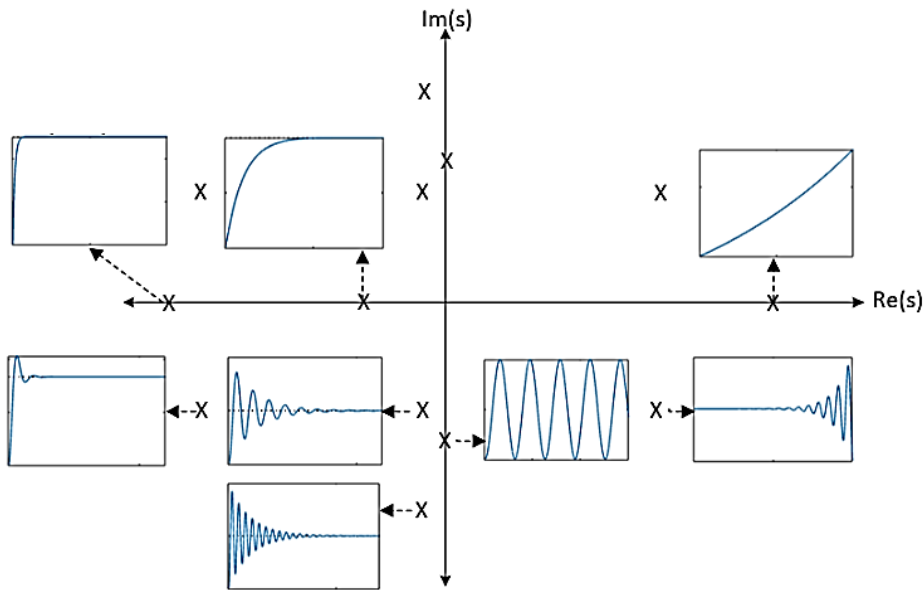


Fig. 1.7 Respuesta temporal de un sistema continuo de acuerdo con la ubicación de polos

De otro lado, a las raíces del polinomio numerador de la función de transferencia se les llama **ceros**. Los ceros surgen de una ecuación diferencial cuando se tienen derivadas de la variable de entrada y tienen una interpretación un poco más compleja, la cual se dará a continuación para el caso continuo. Como dependen de la entrada, los ceros representan el acoplamiento del sistema con el entorno. Para empezar, los ceros afectan la respuesta temporal y frecuencial del sistema, logrando incluso una especie de “adelantamiento” de la respuesta temporal *en sistemas discretos* que conlleva a que las condiciones iniciales iguales a cero sean menores que n . Formalmente, los ceros z_i satisfacen la siguiente expresión:

$$\lim_{s \rightarrow z_i} G(s) = 0 \quad (1.26)$$

La expresión anterior se satisface en valores finitos (**ceros finitos**), pero también en valores infinitos (**ceros infinitos**). En sistemas dinámicos el número de ceros se considera igual al número de polos, por lo que se considera que los ceros faltantes que están en el infinito (real, imaginario o complejo). Por defecto, se denominan ceros generalmente a los ceros finitos. El siguiente ejemplo muestra la ubicación de los polos y ceros:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)e^{-3s}}{s^2(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$\text{Polos} = \{0, 0, -3, 1+i, 1-i\} \quad \text{Ceros (finitos)} = \{-1, -2\}$$

En general, un cero finito de un sistema lineal invariable en el tiempo es un valor z_i que muestra cuándo la transmisión desde una entrada no nula a una salida es bloqueada debido a efectos internos en el sistema. En un sistema con una sola entrada y una salida si se aplica una entrada $u = e^{z_i t}$, la salida tenderá a cero (elimina la entrada). Para el caso de ceros complejos se bloquean las entradas complejas $\{e^{it}, e^{-it}\}$ que corresponden a las entradas reales $\{\sin t, \cos t\}$. Por ejemplo, la respuesta temporal del siguiente sistema se muestra en la Fig. 1.8, donde se observa que la salida finalmente desaparece si se aplica la entrada adecuada relacionada con el cero de la función de transferencia, incluso si la entrada crece indefinidamente:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad u = e^t, \quad U(s) = \frac{1}{s-1}, \quad u(0^-) = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}, \quad y(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Hay un hecho importante a resaltar en el ejemplo anterior: si se resuelve la ecuación diferencial con la respectiva entrada se obtiene una solución diferente ($y = 0$). En efecto:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} - u, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$\dot{u} - u = 0, \quad u(t) = e^t, \quad y(t) = 0$$

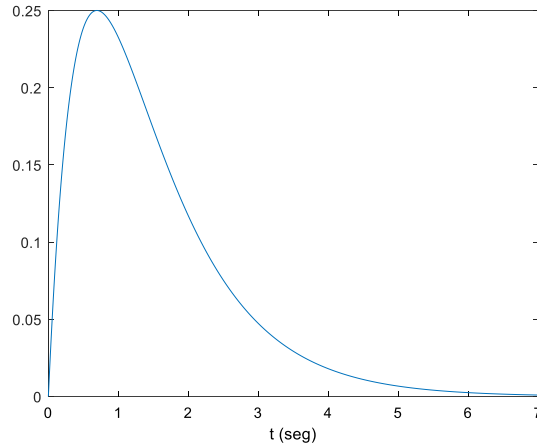


Fig. 1.8 Interpretación de un cero de un modelo lineal con una entrada creciente e^{zt}

La razón del problema anterior es que se están resolviendo dos problemas diferentes: para la ecuación diferencial $u(0) = 1$, mientras que en el caso de la función de transferencia se tiene que $u(0) = 0$. Cuando se resuelve una ecuación diferencial con derivadas de la entrada por transformada de Laplace, se debe especificar que $u(0^-) = 0$ para obtener la primera solución $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, o $u(0^+) = 1$ para la segunda solución ($y = 0$). Se invita al lector a verificar lo dicho anteriormente [11] [12].

Así como la ubicación en el plano complejo de los polos tiene una implicación en el comportamiento del sistema, la ubicación de los ceros también juega un papel importante. Cuando un sistema lineal es estable y los ceros están en el semiplano izquierdo para el caso continuo, o dentro del círculo unitario para el caso discreto (el caso continuo y discreto se puede unificar bajo el nombre de **polos y ceros estables**), se dice que se tiene un **sistema de fase mínima**. El retardo de tiempo continuo implica un comportamiento de fase no mínima, tal y como puede verse de la ecuación (1.24). Es importante resaltar que un sistema de fase mínima es aquel que tiene no solo ceros estables, sino también los polos estables; esta confusión se debe a que normalmente se asume que el sistema es estable.

Un cero de fase mínima al acercarse al eje imaginario tiende a aumentar el sobreimpulso máximo, reducir el tiempo de pico y reducir el tiempo de

crecimiento, tal y como se muestra a continuación. Sea la siguiente función de transferencia con un cero en z_i :

$$G(s) = \frac{1}{z_i}(s + z_i)\bar{G}(s) = \left(\frac{s}{z_i} + 1\right)\bar{G}(s) = \bar{G}(s) + \frac{s}{z_i}\bar{G}(s)$$

Con una entrada $u = 1$ la respuesta temporal es:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \frac{1}{z_i}\dot{\bar{y}}(t)$$

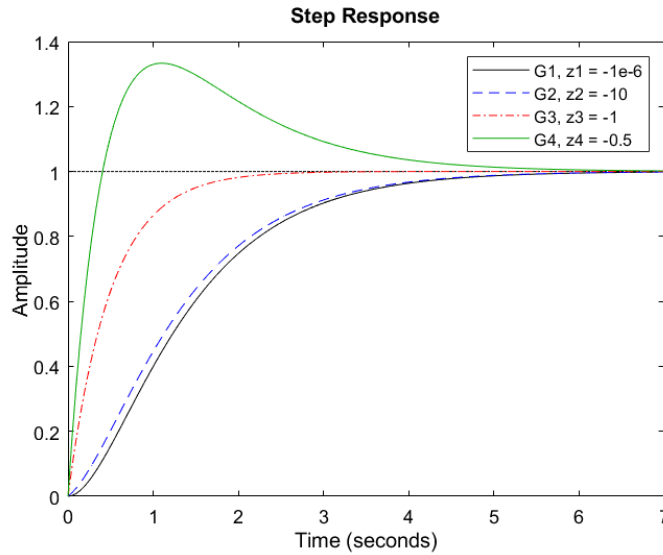


Fig. 1.9 Efecto de la posición de un cero de fase mínima en la respuesta temporal

Por ejemplo, pueden verse en la Fig. 1.9 los efectos mencionados anteriormente utilizando el siguiente código de MATLAB para el cálculo de la respuesta temporal con diferentes posiciones del cero z_i y $\bar{G}(s) = 2/(s^2 + 3s + 2)$:

```
z1 = -1e6; G1 = 2*tf([-1/z1 1], [1 3 2]); z2 = -10; G2 = 2*tf([-1/z2 1], [1 3 2]);
z3 = -1; G3 = 2*tf([-1/z3 1], [1 3 2]); z4 = -0.5; G4 = 2*tf([-1/z4 1], [1 3 2])
step(G1,'k',G2,'b--',G3,'r-.',G4,'g'), legend({'G1, z1=-1e-6' 'G2, z2=-10' 'G3, z3=-1' 'G4, z4=-0.5'})
```

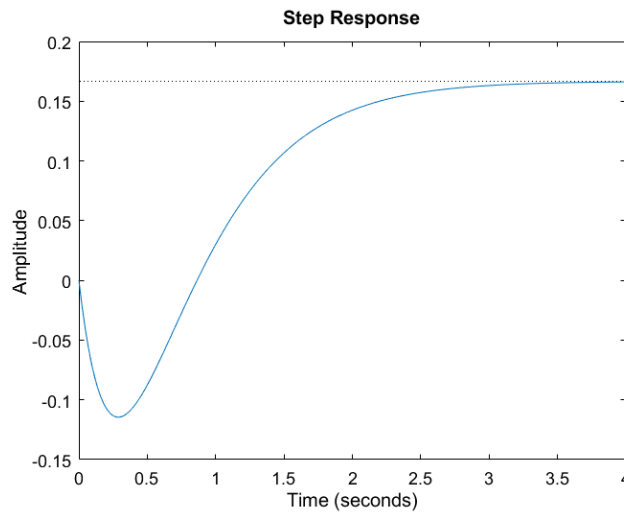


Fig. 1.10 Comportamiento típico de algunos sistemas de fase no mínima

Como se verá en la sección 3.7, Fig. 3.31, el nombre de fase no mínima proviene del hecho de que, si se traza la respuesta frecuencial de sistemas que tienen una función de transferencia con una forma semejante que se diferencia solo por el signo de los polos y ceros, el cambio de fase será mínimo solo para aquella función de transferencia con todos sus polos y ceros estables. Algo parecido aparece muchas veces (no siempre) en la respuesta temporal, donde en un sistema estable de fase no mínima la respuesta puede tener una variación total mayor que la de un sistema estable de fase mínima equivalente (mismos polos y ceros de diferente signo), con un comportamiento extraño ante una entrada constante positiva, cuando, en lugar de subir, la respuesta temporal desciende para luego empezar a subir de nuevo (ver Fig. 1.10).

Algunos casos prácticos de un comportamiento de fase no mínima son: (1) Péndulo invertido: cuando se quiere mover el péndulo hacia la izquierda, primero debe moverse la base hacia la derecha, el péndulo se inclinará hacia la izquierda y luego hay que mover la base rápidamente hacia la izquierda y sobrepasar el centro de gravedad para que se estabilice en la nueva posición. (2) Calentamiento de una casa con horno de carbón: si la temperatura es demasiado baja, se agrega más carbón para calentar el horno, pero al principio se obtiene realmente lo contrario, pues la temperatura se reduce debido a que el carbón agregado atenúa el fuego. Luego, el fuego obtiene más potencia y la

temperatura comienza a subir. (3) La altitud de un avión: cuando un piloto quiere ganar altura, primero tiene que girar hacia arriba la aeronave para aumentar el ángulo de ataque, pero se obtiene una fuerza hacia abajo que baja el centro de gravedad antes de que el aumento de la fuerza hacia arriba en las alas levante el avión, a partir del aumento del ángulo de ataque. (4) La digestión y la mayoría de los procesos metabólicos: para obtener calorías de los alimentos, el cuerpo debe gastar calorías para descomponer los alimentos (masticar, digerir, etc.), pero a largo plazo gana más energía de la comida que la que se gastó. (5) La mayoría de las prácticas médicas: muchas curas requieren la ingestión de medicamentos tóxicos que inicialmente hacen que el paciente se sienta mucho peor, pero luego lo mejoran. (6) Negocios/vida: para obtener ganancias/éxito, lo que significa bienestar y tranquilidad, se necesita un período inicial de arduo trabajo y problemas. (7) Ejercicio físico: por lo general, el ejercicio al inicio hace sentir peor a la persona (menos energía), pero a la larga la hace sentir mejor. (8) Contratación de un nuevo empleado: el objetivo de contratar a alguien es aumentar la productividad, pero generalmente la productividad en un grupo con un nuevo empleado inicialmente disminuye debido a la capacitación requerida.

En el caso de sistemas con múltiples entradas y salidas la interpretación de los ceros es más compleja, dado que además del valor del cero es necesario incluir un vector \mathbf{p}_z [13] [14]. En sistemas MIMO existen diferentes tipos de ceros, pero los más usuales (que se ajustan a la definición anterior) son los llamados **ceros de transmisión** cuando se tiene una realización mínima (después de la cancelación de polos y ceros) y los **ceros invariantes** de una realización no mínima. En la sección 1.8.8 se explica cómo calcular los polos y ceros a partir de la ecuación de estado. Para el caso MIMO, en este libro se utiliza MATLAB para su cálculo, pero es importante comprender su significado. Si el lector quiere profundizar, en [14] está la solución analítica a los problemas planteados a continuación.

La **realización mínima** (o de mínima dimensión) de una ecuación de estado o función de transferencia es la representación que queda luego de reducir el orden por la cancelación de polos y ceros (eliminación de los modos no controlables y no observables). El orden del modelo resultante es igual al **grado de McMillan**. En el caso de una función de transferencia, a la realización mínima también se le denomina **fracción coprime**. En la sección 1.4.3 se tratan los métodos de reducción del orden. Una ecuación de estado tiene una

realización mínima si es completamente controlable y observable (sección 4.10).

En general, y por definición, los polos de una realización mínima de una matriz de funciones de transferencia $\mathbf{G}(s)$ se obtienen del mínimo común denominador de todos los menores no nulos; los ceros se obtienen del máximo común divisor de todos los numeradores de orden igual al **rango** (número de filas o columnas linealmente independientes) de $\mathbf{G}(s)$, donde el polinomio de los polos debe estar en el denominador de cada menor. Se puede ver que es más probable que una matriz de funciones de transferencia rectangular tenga menos ceros que una cuadrada. El cálculo de los polos y ceros de sistemas MIMO no es un problema trivial y no se obtienen, generalmente, de la matriz de funciones de transferencia.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.12 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.13 en la web del libro.

1.4.3 Reducción del orden de la función de transferencia

El orden de un modelo matemático es una abstracción matemática adecuada para la representación de una realidad física, generalmente relacionada con los elementos almacenadores de energía (ver la sección 1.8). Sin embargo, puede ocurrir que haya variables linealmente dependientes o que ciertos valores de los parámetros lleven a que una representación de menor orden (realización mínima) sea suficiente para la modelación del sistema. Por lo tanto, es importante conocer los métodos que permiten la reducción del orden, algunos de los cuales (los más intuitivos) se presentan a continuación para el caso lineal invariable en el tiempo: cancelación de polos y ceros de fase mínima, eliminación de polos insignificantes y métodos formales con MATLAB. Otra forma consiste en aplicar métodos de identificación de sistemas (capítulo 5) para, dado un modelo determinado, obtener datos de una respuesta temporal con una entrada determinada y de esos datos calcular un modelo adecuado de menor orden. Los dos primeros métodos se basan en la idea básica de quitar los polos y compensar con una ganancia, de manera que se conserve el valor final ante una entrada escalón:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = G(0)$$

Para el caso de cancelación de polos y ceros cercanos se tiene:

$$G(s) = \bar{G}(s) \frac{s + a_1}{s + a_2} = \bar{G}(s) \frac{s + a \pm \Delta a}{s + a} = \bar{G}(s) \left[1 \pm \frac{\Delta a}{s + a} \right] \simeq k \bar{G}(s)$$

La constante de compensación k se obtiene a partir del término que se elimina:

$$G(0) = k \bar{G}(0), \quad k = \frac{G(0)}{\bar{G}(0)}$$

De la expresión anterior se observa que se puede cancelar un polo y un cero cuando $a > 0$, es decir, el polo está en el semiplano izquierdo y la respuesta e^{-at} desaparece con el tiempo (desaparece más rápidamente entre más pequeño sea Δa). Para obtener el mismo valor final, se realiza una compensación con un valor k , igual a los términos que se quitan evaluados en cero.

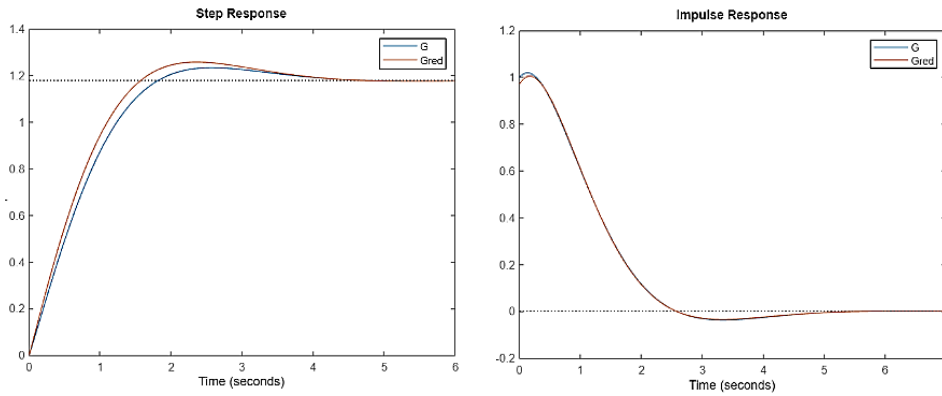


Fig. 1.11 Efecto en la respuesta temporal de la reducción del orden por cancelación de polos y ceros

Por ejemplo:

$$G(s) = \frac{(s+1.1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2.8)(s^2+2s+2)}, \quad \bar{G}(s) \approx \frac{k(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$k = \frac{G(0)}{\bar{G}(0)} = \frac{(s+1.1)(s+3)}{(s+1)(s+2.8)} \Big|_{s=0} = \frac{(1.1)(3)}{(1)(2.8)} = 1.1786$$

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

$$\bar{G}(s) \approx \frac{1.1786(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

En la Fig. 1.11 se comparan las respuestas temporales a un escalón y a un impulso de las dos funciones de transferencia utilizando MATLAB:

```
G = zpke([-1.1, -2, -3], [-1+i, -1-i, -1, -2.8], 1); Gred = zpke([-2], [-1+i, -1-i], 1.1786);
step(G, Gred), legend, impulse(G, Gred), legend
```

De manera similar, pueden eliminarse polos insignificantes (sección 1.4.2), es decir, los que se encuentren muy a la izquierda en el semiplano izquierdo y cuya respuesta temporal a un escalón desaparece rápidamente, y compensarlos con un valor k . Por ejemplo, en la siguiente función de transferencia el polo dominante es (-1) y el polo insignificante es (-10) , el cual está a 10 veces del polo dominante:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)(s+10)} \simeq \frac{5k}{(s+1)(s+2)} = \bar{G}(s)$$

$$k = \frac{G(0)}{\bar{G}(0)} = \frac{1}{s+10} \Big|_{s=0} = \frac{1}{10} = 0.1, \quad \bar{G}(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+2)}$$

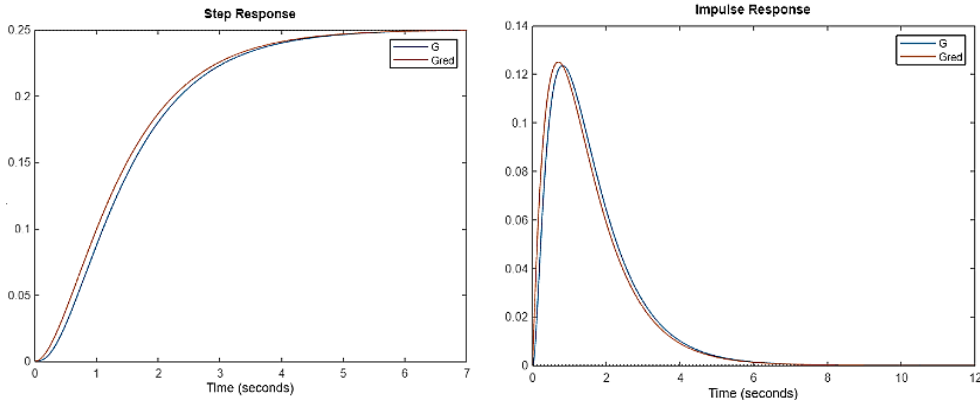


Fig. 1.12 Efecto en la respuesta temporal de la reducción del orden por eliminación de polos insignificantes

En la Fig. 1.12 se comparan las respuestas temporales a un escalón y a un impulso de las dos funciones de transferencia. El respectivo código de MATLAB es:

```
G = zpk([], [-1, -2, -10], 5); Gred = zpk([], [-1, -2], 0.5); step(G, Gred), legend
```

En cuanto a los métodos formales, la función `balred` de MATLAB implementa un método de reducción que proporciona estabilidad y un estricto control de errores. Para el primer ejemplo, los resultados son los siguientes, con un ajuste perfecto en los gráficos:

```
G = zpk([-1.1, -2, -3], [-1+i, -1-i, -1, -2.8], 1); Gred = balred(G, 2); % Reducción a un modelo de orden 2
step(G, Gred), legend
```

$$\text{Gred} = \frac{0.0032813 (s+2.571) (s+295.5)}{(s^2 + 2.123s + 2.115)}$$

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.14 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.17 en la web del libro.

1.5 Ecuaciones en diferencias de sistemas dinámicos lineales de tiempo discreto

1.5.1 *Conceptos*

Una ecuación en diferencias es una ecuación que contiene diferencias finitas hacia delante o hacia atrás. Una ecuación en diferencias se puede resolver analíticamente (sección 1.5.4), de una manera similar a la solución de las ecuaciones diferenciales, pero lo útil es que se pueden resolver iterativamente. Las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de estado de tiempo continuo se llevan a ecuaciones en diferencias para su solución numérica en un computador digital.

Utilizando la definición de derivada y su aproximación puede obtenerse la **diferencia finita hacia delante** de primer orden, las cuales corresponden al método numérico de Euler (sección 2.7), donde se toma el paso fijo del método numérico igual al período de muestreo T_s (sección 1.5.2), y los instantes de tiempo son discretos e iguales a $t = kT_s$:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \simeq \frac{y((k+1)T_s) - y(kT_s)}{T_s} = \Delta y(kT_s) \quad (1.27)$$

Donde

$$\Delta y(kT_s) = \frac{y((k+1)T_s) - y(kT_s)}{T_s}$$

De igual manera, la **diferencia finita hacia atrás** tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} \simeq \frac{y(kT_s) - y((k-1)T_s)}{T_s} = \nabla y(kT_s) \quad (1.28)$$

Donde

$$\nabla y(kT_s) = \frac{y(kT_s) - y((k-1)T_s)}{T_s}$$

Las diferencias finitas de orden 2 y superiores se obtienen a partir de las expresiones anteriores. Por ejemplo, la diferencia finita hacia adelante de segundo orden es:

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}y(kT_s) &= \frac{\Delta y((k+1)T_s) - \Delta y(kT_s)}{T_s} \\ \Delta^{(2)}y(kT_s) &= \frac{y((k+2)T_s) - 2y((k+1)T_s) + y(kT_s)}{T_s^2} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si en una ecuación diferencial se reemplaza cada derivada de orden n por una diferencia finita de orden n , entonces se obtienen ecuaciones en diferencias hacia adelante y hacia atrás como las que se muestran a continuación, donde, además, se omite T_s y *se deja de manera implícita*. Es importante anotar que, aunque en dichas expresiones no aparece explícitamente el símbolo Δ o ∇ , la ecuación se sigue llamando una ecuación en diferencias y el orden del término $y(k+i)$ es igual a i , y el orden de la ecuación está dado por el mayor valor de i .

La ecuación en diferencias finitas hacia adelante de orden n con coeficientes constantes, y con condiciones iniciales, es:

$$\begin{cases} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = u(k) \\ y(0) = y_{01}, y(1) = y_{02}, \dots, y(n-1) = y_{0n} \end{cases} \quad (1.30)$$

La ecuación en diferencias finitas hacia atrás de orden n con coeficientes constantes, y con condiciones iniciales, es:

$$\begin{cases} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n-1} y(k-n+1) + a_n y(k-n) = u(k) \\ y(0) = y_{01}, y(1) = y_{02}, \dots, y(n-1) = y_{0n} \end{cases} \quad (1.31)$$

Las condiciones iniciales se obtienen a partir de las diferencias finitas. Por ejemplo:

$$\dot{y}(t) \simeq \frac{y(k+1) - y(k)}{T_s}, \dot{y}(0) \simeq \frac{y(1) - y(0)}{T_s}, y(1) \simeq \dot{y}(0) + T_s \dot{y}(0)$$

Aunque se puede aproximar una ecuación diferencial de cualquier orden con diferencias finitas del mismo orden, una solución más adecuada consiste en convertir la ecuación diferencial de orden n en n ecuaciones diferenciales de primer orden, tal y como se explica en la sección 1.8.2.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.7 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.3 en la web del libro.

1.5.2 Discretización o digitalización de señales

La **discretización** o digitalización es el proceso de conversión de una señal o modelo matemático de tiempo continuo en una señal o modelo matemático de tiempo discreto, lo cual requiere de una operación de **muestreo** (toma de muestras) con un **período de muestreo** T_s (o **frecuencia de muestreo** $\omega_s = 2\pi/T_s$ o $f_s = 1/T_s$). El muestreo puede ser **regular** (a intervalos iguales) o **irregular** (a intervalos diferentes). En el caso de un sistema con múltiples señales, el muestreo puede ser **monofrecuencia** (la misma frecuencia de muestreo para cada una de las señales) o **multifrecuencia** (diferentes frecuencias de muestreo para cada una de las señales). Generalmente, el período de muestreo se da con una sola cifra significativa.

Con un período de muestreo pequeño se obtiene más información del sistema, la respuesta temporal es más suave y hay una respuesta más rápida a las perturbaciones, pero el costo computacional es mayor y los polos del modelo lineal de tiempo discreto tienden a ubicarse en el círculo unitario,

dado que $z = e^{T_s s}$, con lo cual la estabilidad relativa disminuye. Con un período de muestreo grande se pierde información y se presentan problemas indeseados como el enmascaramiento de señales o las oscilaciones ocultas. El mejor período de muestreo es el mayor período que da las prestaciones deseadas. Por lo tanto, se debe seleccionar adecuadamente el período de muestreo utilizando, como mínimo, el **teorema de muestreo de Nyquist-Shannon**, el cual establece que la frecuencia de muestreo ω_s de una señal continua debe ser mayor que dos veces la frecuencia máxima de la señal ω_B (según la descomposición dada por el transformada de Fourier descrita en la sección 3.7.4), conocida como **ancho de banda**, para que la señal continua se pueda reconstruir a partir de sus muestras:

$$\omega_s > 2\omega_B \quad (1.32)$$

La explicación de la expresión anterior se puede de ver a partir del fenómeno de doblado del espectro de las señales. El concepto de espectro se explica en la sección 3.7.4. El **doblado del espectro** (*folding*) es el fenómeno en el cual al muestrear una señal de tiempo de banda limitada el espectro se repite con la misma forma y con un distanciamiento igual a la frecuencia de muestreo ω_s (Fig. 1.13). Por lo tanto, se debe muestrear de manera que no se solapen las repeticiones del espectro de la señal discreta.

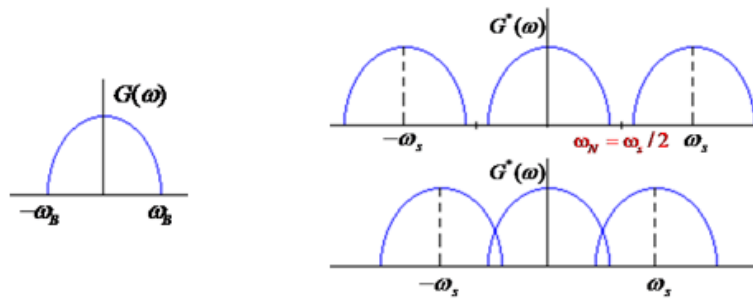


Fig. 1.13 Fenómenos de doblado y solapamiento del espectro

El fenómeno de **solapamiento del espectro** genera un fenómeno de enmascaramiento de la señal. El **enmascaramiento de señales** (*aliasing*) es el fenómeno en el cual una señal discreta aparece de una forma diferente a la señal continua. Por ejemplo, al observar las aspas de un ventilador o llantas de un vehículo que se mueven rápidamente, estas aparentemente se mueven en

sentido contrario, lo cual se debe a que la frecuencia del procesamiento del cerebro no es la adecuada para observar ese movimiento. Si se tiene una señal con una frecuencia ω y se muestrea de manera incorrecta con una frecuencia ω_s , se generan señales de frecuencias menores ω_1 (máscaras), tal y como se muestra en la Fig. 1.14. Las frecuencias de las máscaras son: $\omega_1 = |\omega \pm k\omega_s|, k = 1, 2, 3, \dots$

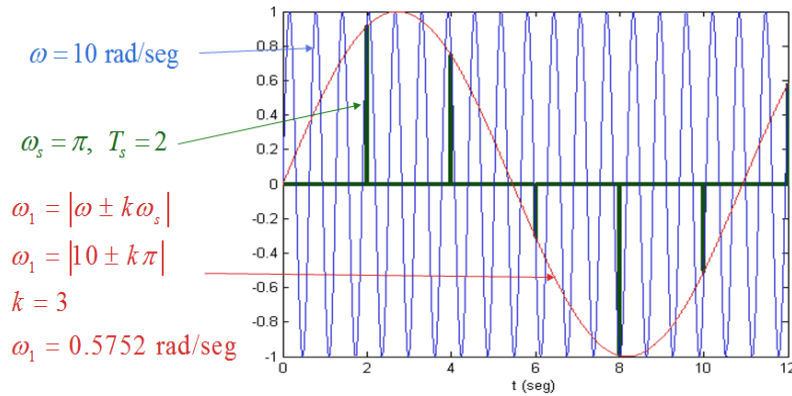


Fig. 1.14 Enmascaramiento (*aliasing*) de señales

Las señales en general no tienen banda limitada, por lo que para evitar el solapamiento es necesario eliminar, en realidad reducir, con un **filtro antisolapamiento** (*antialiasing*) tipo pasabajas (sección 3.7.5) las señales mayores a la frecuencia para la cual se obtuvo la frecuencia de muestreo (la llamada **frecuencia de Nyquist**):

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} (\text{rad/s}), \quad f_N = \frac{f_s}{2} (\text{Hz}) \quad (1.33)$$

Es decir, si se conoce el ancho de banda de una señal, entonces se puede aplicar el teorema, pero si se especifica la frecuencia de muestreo, entonces se debe asegurar, por medio de un filtro pasabajas, que no haya en la señal frecuencias mayores a la frecuencia de Nyquist.

Más allá de teorema de muestreo, existe la regla heurística (1.34) permite una mejor selección a partir del tiempo de crecimiento T_r de la respuesta temporal (ver sección 1.5.2), siendo $T_r/10$ el valor por defecto. Si el sistema

es inestable se debe seleccionar el período de muestreo a partir de la respuesta deseada en lazo cerrado.

$$\frac{T_r}{10} < T_s < \frac{T_r}{2} \quad (1.34)$$

Adicional a las condiciones anteriores, si se quiere conservar la controlabilidad y observabilidad con el muestreo se deben evitar períodos de muestreo cercanos a aquellos que violan la condición de regularidad del muestreo (sección 4.10.3).

Los procesos de muestreo y retención se implementan respectivamente por medio de dispositivos electrónicos llamados **convertidor análogo/digital (ADC)** y un **convertidor digital/análogo (DAC)**, los cuales convierten una señal continua (generalmente voltaje o corriente) en una señal discreta (binaria) o viceversa. En un ADC la señal continua se mantiene constante entre dos instantes de muestreo, lo cual corresponde a una DAC con un retenedor de orden cero.

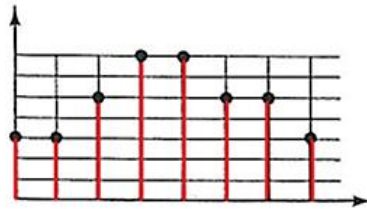


Fig. 1.15 Representación de la cuantificación de señales

La **cuantificación** es el proceso de representación de una variable continua por medio de un conjunto finito de valores discretos (valores cuantificados) y depende del número de bits del convertidor, tal y como se muestra en la Fig. 1.15. El **error de cuantificación** es el error (de truncamiento o redondeo) al aproximar un valor analógico a un nivel digital y que puede verse como un ruido llamado **ruido de cuantificación**. El **nivel de cuantificación** es el intervalo entre dos puntos adyacentes de decisión (máximo error de cuantificación). De esta manera, debido a un error de cuantificación una variable analógica con un valor dado conocido no tendrá el mismo valor exacto al discretizar y pasar a un sistema digital.

Una incorrecta selección del período de muestreo también puede llevar a un fenómeno de **oscilaciones ocultas** (*intersample ripple*, **rizado intermuestreo**) entre instantes de muestreo y que no se observan en la señal discreta, pero sí en la señal continua. La Fig. 1.16 explica el fenómeno.

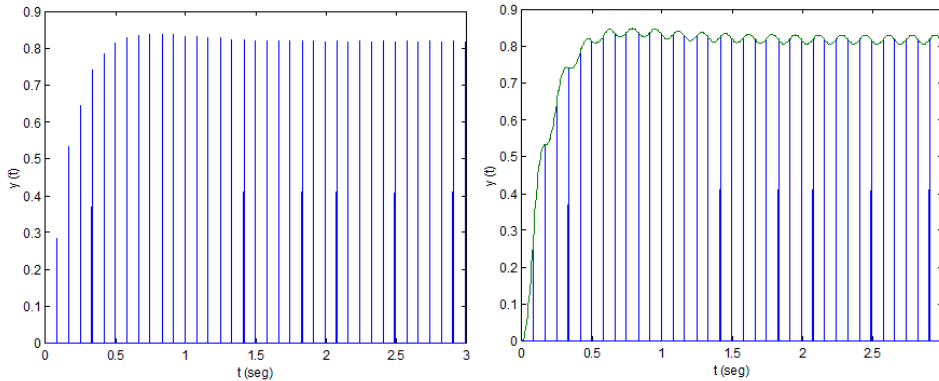


Fig. 1.16 Oscilaciones ocultas que aparecen debido a una selección incorrecta del período de muestreo

En sistemas de control en lazo cerrado pueden aparecer oscilaciones ocultas por la pérdida de observabilidad al discretizar el modelo continuo con un período de muestreo incorrecto (ver la condición de regularidad del muestreo en la sección 4.10 sobre observabilidad). Dichas oscilaciones se pueden detectar físicamente en esos casos por un sonido parecido a un timbre en el actuador, o en simulación si se trabaja con la planta continua, la cual exige un paso del método numérico menor que el período de muestreo.

1.5.3 Solución iterativa

Una vez se tiene la ecuación en diferencias, esta puede resolverse iterativamente. La **solución numérica iterativa o recursiva** de una ecuación en diferencias implica el conocimiento de las condiciones iniciales y el despeje del término de mayor orden, luego se reemplazan las condiciones iniciales y se va hallando de manera progresiva los valores de la solución en los siguientes instantes de muestreo, por lo que en dicha solución solo es posible hallar la solución en el instante k si se conocen todos los valores de la solución hasta el instante $(k - 1)$. Si se convierte una ecuación en diferencias hacia delante en

una ecuación en diferencias hacia atrás, o viceversa, *las condiciones iniciales no cambian*. La solución iterativa se puede aplicar a ecuaciones en diferencias lineales y no lineales. De hecho, la aplicación de un método numérico a la solución de una ecuación diferencial (simulación, Capítulo 2) implica su transformación a una ecuación en diferencias [15].

Por ejemplo, sea la siguiente ecuación en diferencias hacia delante de orden 2:

$$y(k+2) + 0.5y(k+1) - 0.2y(k) = 1, \quad y(0) = 1, y(1) = 0$$

La solución iterativa, despejando el término de mayor orden, es:

$$y(k+2) = -0.5y(k+1) + 0.2y(k) + 1$$

Tomando $k = 0$ y utilizando las condiciones iniciales:

$$y(2) = -0.5y(1) + 0.2y(0) + 1 = 1.2, \quad y(2) = 1.2$$

Tomando $k = 1$ y utilizando las soluciones anteriores:

$$y(3) = -0.5y(2) + 0.2y(1) + 1 = 0.4, \quad y(3) = 0.4$$

El proceso se puede continuar para encontrar los valores siguientes. Es importante señalar que no es posible calcular el valor en el instante k sin encontrar todos los valores anteriores. Por otro lado, no es necesario especificar el período de muestreo o paso, dado que una vez se conozca solo se requiere escalar correctamente los valores de la variable independiente: se cambia por $y(kT_s)$.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.6 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.5 en la web del libro.

1.5.4 Solución analítica

La solución analítica de las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes (sección 2.7) es similar a la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes (sección 1.2): (1) solución de la ecuación homogénea por medio del planteamiento de la ecuación característica, cálculo de las raíces características y obtención de las respectivas funciones; (2) cálculo de una solución particular de la ecuación no homogénea por el método de coeficientes indeterminados o el método de

variación de las constantes; (3) obtención de la solución general como la suma de las dos soluciones anteriores; (4) obtención de la solución particular a partir de las condiciones iniciales (solución del problema de valor inicial).

La solución analítica permite comprender mejor el comportamiento de los sistemas de tiempo discreto y, en particular, de su estabilidad: un sistema lineal de tiempo discreto es estable si el módulo de todas sus raíces características es menor o igual que uno; la estabilidad es asintótica si el módulo es estrictamente menor que uno, es decir, *se encuentran dentro de un círculo unitario*.

Sea la siguiente ecuación en diferencias hacia delante lineal no homogénea con coeficientes constantes de orden n :

$$\begin{cases} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = u(k) \\ y(0) = y_{01}, y(1) = y_{02}, \dots, y(n-1) = y_{0n} \end{cases} \quad (1.35)$$

Se resuelve inicialmente la ecuación homogénea:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = 0$$

La solución se plantea de la siguiente manera: $y(k) = \lambda^k$ (en el caso continuo la solución de buscaba de la forma $y = e^{\lambda t}$), lo cual da la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1.36)$$

Las raíces características pueden ser reales o complejas, simples o múltiples, y se pueden representar de manera general de la siguiente manera (debe trabajarse con la representación polar):

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha \pm i\beta = r e^{i\varphi} \\ r &= \sqrt{\text{Re}^2(\lambda) + \text{Im}^2(\lambda)}, \quad \varphi = \arctan \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \end{aligned} \quad (1.37)$$

A una raíz característica de multiplicidad m de la forma anterior le corresponde la siguiente solución:

$$y_h(k) = r^k \left[\begin{aligned} &(c_1 \cos \varphi k + c_2 \sin \varphi k) + k(c_3 \cos \varphi k + c_4 \sin \varphi k) + \dots \\ &k^{m-1}(c_{2m-1} \cos \varphi k + c_{2m} \sin \varphi k) \end{aligned} \right] \quad (1.38)$$

En el caso particular de raíces reales que no se repiten $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ se tiene:

$$y_h(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \dots + c_n \lambda_n^k$$

Si una raíz característica es compleja, pero no se repite se tiene:

$$y_h(k) = r^k (c_1 \cos \varphi k + c_2 \sin \varphi k)$$

La solución para el caso cuando una raíz real λ se repite m veces es:

$$y_h(k) = \lambda^k (c_1 + c_2 k + \dots + c_r k^{m-1})$$

De las expresiones anteriores se puede deducir que el sistema es estable si las raíces características están dentro del círculo unitario, es decir, $|\lambda| < 1$.

La forma de la solución de la ecuación en diferencias en forma de una potencia de λ muestra que *no interesan las raíces iguales a cero*. Por lo tanto, la ecuación debe tener siempre el término $y(k)$ y, si no existe, entonces se puede hacer un cambio de variables, quitar condiciones iniciales y reescribir la ecuación. Por ejemplo, la siguiente ecuación se puede simplificar haciendo el cambio de variables $k \rightarrow k - 2$ (el tiempo 0 equivale a $k = 2$) y se eliminan las primeras dos condiciones iniciales que no las puede satisfacer la ecuación, donde $u_s(k - n)$ es la función escalón unitario, y las dos primeras condiciones iniciales pasan a ser valores fijos (el resultado coincide con el de la transformada z de la sección 1.6):

$$y(k + 3) + ay(k + 2) = u(k), \quad y(0) = y_{01}, y(1) = y_{02}, y(2) = y_{03}$$

Cambio de variable:

$$k \rightarrow k - 2$$

Se tiene:

$$y(k + 1) + ay(k) = u(k - 2)u_s(k - 2), \quad y(0) = y_{03}$$

Cuando el término independiente $u(k)$ tiene la siguiente forma puede aplicarse el método de coeficientes indeterminados, donde A_n, B_n, P_n y Q_n son polinomios del grado mayor igual a n , los dos primeros con coeficientes conocidos y los dos últimos con coeficientes indeterminados:

$$u(k) = \lambda^k [A_n(k) \sin \varphi k + B_n(k) \cos \varphi k] \quad (1.39)$$

El método de coeficientes indeterminados para un término independiente de la forma anterior propone hallar la solución particular de la ecuación no homogénea de la forma, donde m es el número de veces que hay que multiplicar el término por k para que la solución resultante no esté dentro de la solución complementaria:

$$y_{nh}(k) = k^m \lambda^k [P_n(k) \sin \varphi k + Q_n(k) \cos \varphi k] \quad (1.40)$$

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.8 y 1.9 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.4 en la web del libro.

1.6 Transformada z

1.6.1 Definición

La transformada z es el equivalente para sistemas de tiempo discreto de la transformada de Laplace (sección 1.3) y, en general, la idea es la misma de la transformada de Laplace: convertir una ecuación o sistema de ecuaciones en diferencias lineales a una ecuación algebraica en el espacio complejo z utilizando unas expresiones y propiedades básicas que convierten una función $f(k)$ en una función $F(z)$, realizar las operaciones en el espacio z y, finalmente, regresar al espacio k utilizando las mismas expresiones y propiedades básicas en sentido contrario, apoyado por el método de fracciones parciales. La transformada z permite, de esta manera, una operación más simple con sistemas dinámicos lineales de tiempo discreto. La transformada z fue introducida con ese nombre por Ragazzini y Zadeh en 1952. La transformada z modificada fue presentada por E. I. Jury en 1958.

La transformada z puede calcularse directamente de la transformada de Laplace partiendo de la siguiente representación continua por partes $y^*(t)$ de una secuencia de variables discretas, donde $\delta(t - kT_s)$ es la función delta de Kronecker y T_s es el período de muestreo (ver sección 1.5.2 sobre su definición y correcta selección):

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_s) \delta(t - kT_s) \quad (1.41)$$

La **función delta de Kronecker** es una función en el dominio discreto definida de la siguiente manera:

$$\delta(k - n) \equiv \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}^+ \quad (1.42)$$

La transformada de Laplace de la señal anterior tiene la siguiente forma:

$$Y^*(s) = \mathcal{L}\{y^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_s) \mathcal{L}\{\delta(t - kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_s) e^{-kT_s s}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable (esta expresión es fundamental, dado que define la relación entre el plano continuo y el discreto):

$$z = e^{T_s s}, \quad s = \frac{1}{T_s} \ln z \quad (1.43)$$

Lo anterior conlleva a la siguiente definición de la transformada z (unilateral), donde se omite el período de muestreo T_s :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \quad (1.44)$$

Por ser la transformada z una serie infinita, al calcular la transformada de una función determinada es necesario especificar la región de convergencia (*region of convergence*, ROC). Sin embargo, para la solución de ecuaciones en diferencias esta información puede omitirse y manejarse implícitamente, es decir, al aplicar la transformada z se admite que hay una ROC y al aplicar la transformada inversa se entiende que se aplica bajo la suposición de esa ROC.

Igualmente, la transformada z se aplica en realidad a una secuencia de números $\{y(0), y(1), \dots\}$, por lo que *el período de muestreo se puede omitir* y asumirlo de manera implícita. Por ejemplo, si dos señales tienen diferente período de muestreo, pero su secuencia de números es la misma, entonces sus transformadas z son iguales, por lo que la función temporal discreta es única, aunque la función continua no lo es y queda clara una vez se conoce el período de muestreo:

$$\mathcal{Z}\{2^t\}|_{T_s=1} = \mathcal{Z}\{\sqrt{2}^t\}|_{T_s=2} = \mathcal{Z}\{2^k\} = \frac{z}{z-2}$$

Por la razón anterior, no es necesario especificar el período de muestreo en las fórmulas de la transformada z y se puede trabajar siempre con un $T_s = 1$, pero sí es necesario especificar el período de muestreo si se discretiza un modelo continuo o si se quiere dar la respuesta temporal en unidad de tiempo y no en instantes de muestreo.

Dada la definición (1.44) de transformada z , se puede ver que el valor temporal de la función en cada instante de muestreo puede obtenerse realizando una división larga entre los polinomios numerador y denominador:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(i)z^{-i} + \dots$$

Por ejemplo, para la siguiente función se muestra la división larga y los valores de la secuencia de la transformada z inversa:

$$Y(z) = \frac{0.3(z - 2)}{z(z + 0.7)(z + 0.2)}$$

$0.3z - 0.6$	$z^3 + 0.9z^2 + 0.14z$
$-0.3z - 0.27 - 0.042z^{-1}$	$0.3z^{-2} - 0.87z^{-3} + 0.741z^{-4} + \dots$
$-0.87 - 0.042z^{-1}$	
$0.87 + 0.783z^{-1} + 0.1218z^{-2}$	
$0.741z^{-1} + 0.1218z^{-2}$	
\vdots	

Comparando los coeficientes dentro de cada recuadro con la definición de transformada z se tiene:

$$y(0) = 0, y(1) = 0, y(2) = 0.3, y(3) = -0.87, y(4) = 0.741, \dots$$

En este caso, se puede observar que el número de valores iguales a cero al inicio de la serie es igual a la diferencia entre el grado del denominador y el grado del numerador de la transformada z (a esa diferencia se le llama el **orden relativo**).

La transformada z se aplica a señales continuas sin retardo o con un retardo que es múltiplo del período de muestreo ($\tau = d \cdot T_s$) y que permite aplicar la propiedad de traslación. Sin embargo, si la señal tiene un retardo diferente es necesario aplicar la llamada **transformada z modificada** [16] [17]. Las funciones de MATLAB utilizan la transformada z modificada.

1.6.2 Transformadas básicas

Aplicando la definición anterior se llega a las transformadas que se dan en la TABLA 1.3 de algunas funciones básicas. En esta se omiten la región de convergencia y el período de muestreo, puesto que no son necesarios para los cálculos que se requieren en este libro.

TABLA 1.3. TRANSFORMADAS BÁSICAS Z

$f(k)$	1	k	a^k	$\text{sen } ak$	$\cos ak$	$\delta(k - n)$
$F(z)$	$\frac{z}{z - 1}$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	$\frac{z}{z - a}$	$\frac{z \text{ sen } a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$\frac{z(z - \cos a)}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	z^{-n}

Es importante observar que la transformada z es una función propia o estrictamente propia y contiene siempre z en el numerador, exceptuando la transformada z de la función delta. Si una transformada z no tiene z en el numerador eso indica que hay un retardo o una función delta de Kronecker:

$$Y(z) = \frac{1}{z - 1} = \frac{z}{z(z - 1)} \leftrightarrow y(k) = u_s(k - 1)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z - 1} = \frac{z - (z - 1)}{z - 1} = \frac{z}{z - 1} - 1 \leftrightarrow y(k) = 1 - \delta(k)$$

En general, una transformada z se puede expresar usando la función delta de Kronecker o la función escalón unitario:

$$u_s(k - 1) = 1 - \delta(k), \quad \delta(k) = 1 - u_s(k - 1)$$

$$u_s(k - n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \delta(k - i) \quad (1.45)$$

$$\delta(k - n) = u_s(k - n) - u_s(k - (n + 1))$$

1.6.3 Propiedades operacionales

Las propiedades de la transformada z se dan en la TABLA 1.4. Utilizando las propiedades de la transformada z es posible expresar una transformada z como

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

una ecuación en diferencias hacia atrás y de allí encontrar los valores temporales por medio de su solución iterativa:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$Y(z) = \frac{b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-n-1} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Aplicando la transformada inversa z:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 \delta(k+m-n) + \dots + b_m \delta(k-n)$$

TABLA 1.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Propiedad	$f(k)$	$F(z)$
Linealidad	$af_1(k) + bf_2(k)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
Traslación real hacia atrás	$f(k-n) = f(k-n)u_s(k-n)$	$z^{-n}F(z)$
Traslación real hacia delante	$f(k+n)$	$z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k} \right]$
Traslación compleja	$a^k f(k)$	$F(z/a)$
Convolución	$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^k f_1(k-i)f_2(i)$	$F_1(z)F_2(z)$
Sumatoria	$\sum_{i=0}^k f(k)$	$\frac{zF(z)}{z-1}$
Valor inicial	$\lim_{k \rightarrow 0^+} f(k)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Valor final	$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$, si existe	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$
Potenciación	$k^n f(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^n F(z)$

1.6.4 Transformada z inversa

El cálculo de la transformada z inversa por medio de fracciones parciales entrega una solución analítica, mientras que los métodos de la división larga o paso a una ecuación en diferencias hacia atrás dan una solución numérica de manera simple y directa, permitiendo verificar la solución analítica. No siempre la utilización de las fracciones parciales es lo adecuado para el cálculo de la transformada inversa y debe pensarse siempre en las transformadas básicas y las propiedades operacionales en primer lugar. Por ejemplo:

$$Y(z) = \frac{1}{z^{20}(z + 0.5)} = \frac{z}{z^{21}(z + 0.5)}, \quad y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z^{21}(z + 0.5)} \right\}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z + 0.5} \right\} \Big|_{k \rightarrow k-21} u_s(k-21) = (-0.5)^{k-21} u_s(k-21)$$

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.10 y 1.11, y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.9, 1.10 y 1.11 en la web del libro.

1.7 Función de transferencia de tiempo discreto

1.7.1 Definición

Igual que en el caso continuo, la función de transferencia para un sistema LTI de tiempo discreto (lineal invariable en el tiempo o lineal con coeficientes constantes) de una entrada y una salida (SISO, *Single Input Single Output*) es la relación entre la transformada z de la salida y la transformada z de la entrada suponiendo condiciones iniciales iguales a cero, utilizando las ecuaciones en diferencias hacia atrás:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y(k)\}}{\mathcal{Z}\{u(k)\}} \Big|_{c.i.=0} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$$

Una fracción impropia no tiene significado físico y corresponde a un modelo no causal; por ejemplo, la siguiente función de transferencia discreta genera una ecuación en diferencias donde la salida depende de una entrada futura:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z-1} = \frac{z}{1-z^{-1}}, \quad y(\textcolor{red}{k}) = y(k-1) + u(\textcolor{red}{k}+1)$$

El siguiente es un ejemplo de una función de transferencia discreta:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 0.5}{z(z^2 - 0.7)}$$

$$y(k + 3) - 0.7y(k + 1) = u(k + 1) - 0.5u(k)$$

Obtención de la respuesta temporal a partir de la función de transferencia:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad y(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\}$$

Los polos y ceros en el caso discreto se definen, respectivamente, de manera similar que en el caso continuo (sección 1.4.2):

$$\lim_{z \rightarrow p_i} G(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow z_i} G(z) = 0$$

Los polos determinan la estabilidad del sistema, de manera que para un sistema de tiempo discreto la estabilidad se logra si todos los polos tienen un módulo menor que uno (están dentro del círculo unitario), tal y como se muestra en la Fig. 1.6. Lo anterior se observa al dar la solución a partir de las raíces características:

$$y(k) = |\lambda|^k (c_1 \sin \varphi k + c_2 \cos \varphi k) |\lambda| \leq 1$$

Entre más cerca del centro del círculo unitario estén los polos del sistema de tiempo discreto, más rápidamente desaparece el efecto de ese polo en la respuesta temporal. A diferencia del caso continuo (sección 1.4.2), un polo insignificante está ubicado como máximo en el centro del círculo unitario (en el caso continuo se puede llevar a $-\infty$).

Dada la relación (1.43) entre las variables s y z ($z = e^{T_s s}$) se puede ver que un polo o un cero estables continuos se convierte en un polo o cero discretos que tiende al límite del círculo unitario si el período de muestreo se hace cada vez más pequeño. Esta es una de las razones por las cuales no es práctico tomar un período de muestreo demasiado pequeño.

El retardo en los modelos de tiempo discreto se representa como un número natural d llamado **retardo puro**, el cual corresponde a la parte entera hacia abajo de la relación entre el retardo continuo y el período de muestreo (ver la sección 1.5.2 para más detalles):

$$d = \left\lfloor \frac{\tau}{T_s} \right\rfloor \quad (1.46)$$

Dado que $\mathcal{Z}\{f(t-d)\} = z^{-d}F(z)$, la función de transferencia discreta con retardo toma la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} z^{-d} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} z^{-d} \quad (1.47)$$

A la diferencia entre el grado del denominador y el grado del numerador, sin tener en cuenta el retardo, se le denomina el **orden relativo**: $n_r = n - m$. Se recomienda no incluir el retardo puro en la definición del orden relativo en el caso discreto, así como no se incluye en el orden del sistema, dado que el retardo puro solo afecta la respuesta temporal con un desplazamiento y lo que queda de la función de transferencia da una mejor idea del comportamiento del sistema. Es decir, no es lo mismo tener un modelo discreto de orden 2 sin retardo que un modelo de orden 1 con un retardo de 1:

$$G_1(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z+0.7)}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z(z-0.5)}$$

El orden relativo incide en la respuesta temporal (sección 3.6) y frecuencial (sección 3.7), de manera que, por ejemplo, un sistema de orden dos tiene un comportamiento diferente si el orden relativo es dos, uno o cero (puede haber incluso una reducción del orden, como se muestra en la sección 1.4.3). Si un sistema continuo es de orden relativo igual a uno, entonces la pendiente de la respuesta temporal al inicio es diferente de cero, mientras que si es mayor que uno obligatoriamente habrá una pendiente igual a cero.

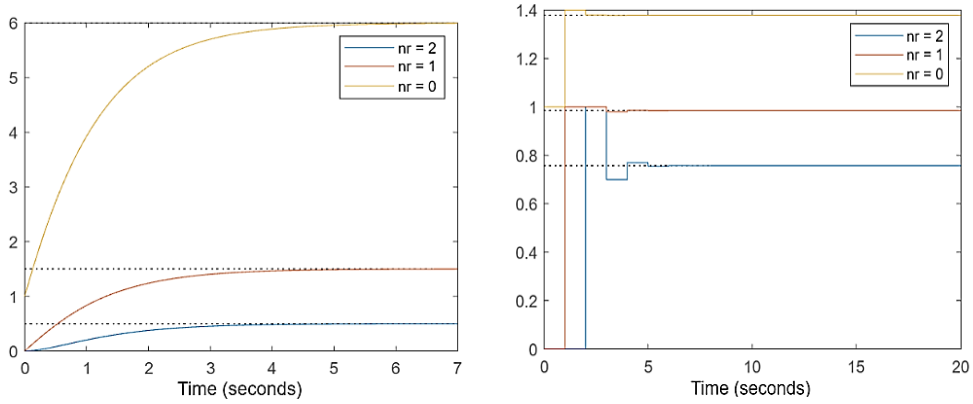


Fig. 1.17 Incidencia del orden relativo en la respuesta temporal a una entrada escalón unitario para una función de transferencia de orden 2 (a) de tiempo continuo y (b) tiempo discreto

Si un sistema discreto tiene orden relativo diferente del orden, la respuesta temporal a un escalón aparentemente no cumple con el requisito de condiciones iniciales iguales a cero, tal y como se puede ver en la Fig. 1.17, pero eso se debe a que se debe trabajar con la ecuación en diferencias hacia atrás:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m-1} z^{-m+1} + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}} z^{-(d+n_r)} \quad (1.48)$$

La respectiva ecuación en diferencias hacia atrás es:

$$y(k) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k - (d+n-m)) + \dots + b_m u(k - (d+n))$$

En el caso de tiempo discreto el **retardo total** nk del sistema está formado por el **retardo puro** d y el **retardo intrínseco** n_r , igual al orden relativo (ver la sección 1.7.2):

$$nk = d + n_r \quad (1.49)$$

Una función de transferencia discreta en términos de z y de orden n con un polinomio numerador de orden m , es decir, de un orden relativo igual a $(n-m)$, tiene aparentemente $(n-m)$ valores iniciales iguales a cero y no n , como se indica en la definición de función de transferencia, pero eso solo se

debe a la presencia del numerador, el cual disminuye el orden aparente del modelo (de ahí la importancia del concepto de orden relativo, especialmente en el caso discreto). Si un modelo discreto no tiene ni retardo ni un polinomio mayor que cero en el numerador, entonces el número de condiciones iniciales iguales a cero es igual al orden del sistema, por lo que el numerador tiene un efecto de “adelantamiento” de la respuesta temporal.

1.7.2 Discretización de la función de transferencia

Los sistemas dinámicos modernos combinan sistemas de tiempo discreto, en forma de algoritmos implementados en computadores, microcontroladores u otros dispositivos, y sistemas de tiempo continuo, como procesos o plantas industriales, lo que exige la utilización de métodos que permitan estudiar matemáticamente sistemas que incluyan ambos tipos de sistemas. En la teoría de los sistemas de tiempo discreto se trabaja con modelos con **señales de datos muestreados**, pero realmente son modelos con señales digitales. El proceso contrario al muestreo se denomina **reconstrucción**, en la cual dada una secuencia de datos muestreados se obtiene una señal de tiempo continuo. La reconstrucción se implementa generalmente por medio de un **retenedor de orden cero** (*Zero-Order Holder*, ZOH), dispositivo electrónico que mantiene la señal constante entre instantes de muestreo, tal y como se muestra en la Fig. 1.18.

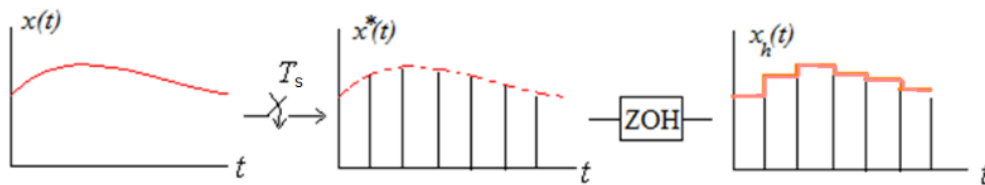
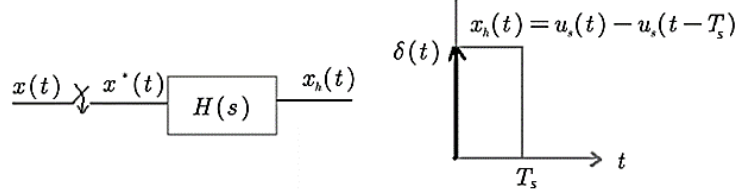


Fig. 1.18 Proceso de muestreo y reconstrucción de señales

Dada una ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes, es posible discretizarla aproximadamente utilizando un método numérico, para luego obtener la respectiva función de transferencia discreta aplicando la transformada z . Sin embargo, hay una manera de calcular directamente la función de transferencia discreta a partir de una función de transferencia

continua sin ninguna aproximación, pero suponiendo una discretización con un retenedor de orden cero.

Para empezar, se obtiene la función de transferencia de un retenedor de orden cero a partir de su interpretación dada en la siguiente figura:



Del primer diagrama se tiene, donde la salida del muestreador es una función delta de Dirac (sección 1.3):

$$H(s) = \frac{X_h(s)}{X^*(s)}, \quad X^*(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

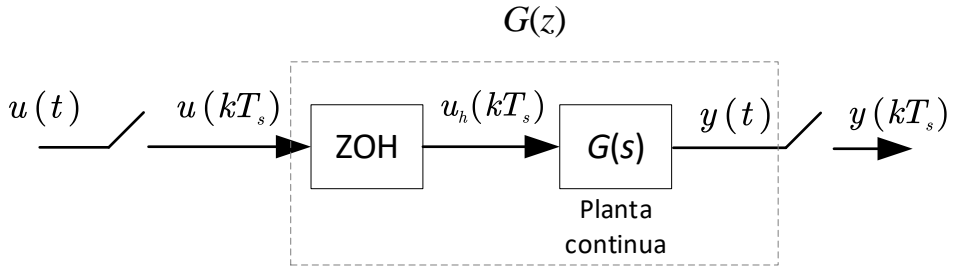
De acuerdo con el segundo gráfico, la salida del retenedor de orden cero es un pulso:

$$X_h(s) = \mathcal{L}\{u_s(t) - u_s(t - T_s)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-T_s s}}{s}$$

Por lo tanto, la función de transferencia $H(s)$ de un retenedor de orden cero es:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \quad (1.50)$$

En el caso de muestreo de un modelo continuo lineal con un retenedor de orden cero se tiene:



El modelo continuo de la planta y el retenedor de orden cero es:

$$GH(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} G(s)$$

Aplicando la transformada z y sus propiedades:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{GH(s)\}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-T_s s}}{s} G(s)\right\}\right\} \\ G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-T_s s} G(s)}{s}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que al retardo $e^{-T_s s}$ le corresponde z^{-1} , se tiene:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$$

Omitiendo el símbolo de transformada inversa de Laplace (el cual se sobreentiende), la expresión final para la discretización con un retenedor de orden cero es:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad (1.51)$$

La expresión anterior, de otro lado, equivale a lo siguiente:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{\text{Respuesta a un escalón}\}}{\mathcal{Z}\{\text{escalón}\}} = \frac{\mathcal{Z}\left\{G(s) \frac{1}{s}\right\}}{\frac{z}{z-1}}$$

La fórmula (1.51) es correcta si la entrada es muestreada con un retenedor de orden cero. La Fig. 1.19 compara la respuesta temporal a partir de la función de transferencia de tiempo discreto (círculos) y la compara con la respuesta temporal a partir del modelo continuo con la entrada sin retención (línea delgada) y con retención (línea gruesa), donde se observa que solo en el último caso se obtiene el resultado correcto.

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

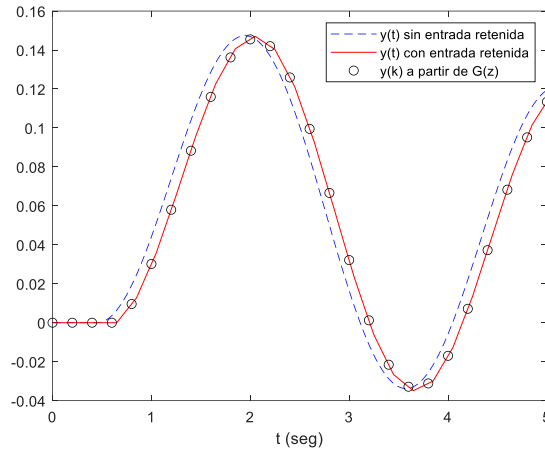


Fig. 1.19 Discretización con un retenedor de orden cero

Código de MATLAB para la obtención de la Fig. 1.19:

```
G = tf(1, [6 1], 'InputDelay', 0.45); Gd = c2d(G, 0.2); t = 0:0.001:5; u1 = sin(2*t); u2 = roc(u1,t,0.2); t3 = 0:0.2:t(end);
u3 = sin(2*t3); y1 = lsim(G, u1, t); y2 = lsim(G, u2, t); y3 = lsim(Gd, u3, t3); plot(t, y1, 'b--', t, y2, 'r-', t3, y3, 'ko')
xlabel('t (seg)'), legend('y(t) sin entrada retenida', 'y(t) con entrada retenida', 'y(k) a partir de G(z)')
function u1 = roc(u,t,Ts) % Función para la retención (ZOH) de señales
N = length(u); tmax = t(end); NTs = floor(tmax/Ts); dt = tmax/(N-1); Ns = Ts/dt; u1 = zeros(1,N);
for i=0:NTs
    u1(1,i*Ns+1) = u(1,i*Ns+1);
    for j=2:Ns
        if i*Ns+j <= N
            u1(i*Ns+j) = u1(i*Ns+1);
        end
    end
end
end
```

Si el sistema tiene un retardo que es múltiplo del período de muestreo ($\tau = d \cdot T_s$), entonces,

$$G(z) = z^{-d}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad (1.52)$$

Si el sistema tiene un retardo que no es múltiplo del período de muestreo ($\tau = d \cdot T_s + \tau'$), donde $0 < \tau' < 1$, entonces es necesario aplicar a la parte no entera τ' la llamada transformada z modificada $\mathcal{Z}_m\{f(k)\}$, la cual no se presenta en este libro, pero que se puede consultar en [17] o [16]. MATLAB incluye la función `c2d` que permite la discretización en cualquiera de los casos anteriores. Es decir,

$$\tau = d \cdot T_s + \tau', \quad d = \left\lfloor \frac{\tau}{T_s} \right\rfloor$$

$$G(z) = z^{-d}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}_m \left\{ \frac{G(s)e^{-\tau's}}{s} \right\} \quad (1.53)$$

Es importante indicar que existen otros métodos de discretización, los cuales no se tratan en este libro, entre los cuales están: Tustin, mapeo de polos y ceros (*Matched*), invariancia al impulso y aproximación de primer orden (FOH). La función de MATLAB `c2d` incluye esos casos. Para ilustrar el método anterior, sea el siguiente modelo:

$$G(s) = \frac{e^{-0.45s}}{6s + 1}, \quad T = 0.2, \quad d = \left\lfloor \frac{\tau}{T_s} \right\rfloor = 2, \quad \tau' = 0.05$$

Entonces,

$$G(z) = z^{-2}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}_m \left\{ \frac{e^{-0.05s}}{s(6s + 1)} \right\}$$

El resultado se muestra en la Fig. 1.20. El código de MATLAB es:

```
G = tf([1], [6 1], 'InputDelay', 0.45); Gd = c2d(G, 0.2); step(G, Gd, 1)
```

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

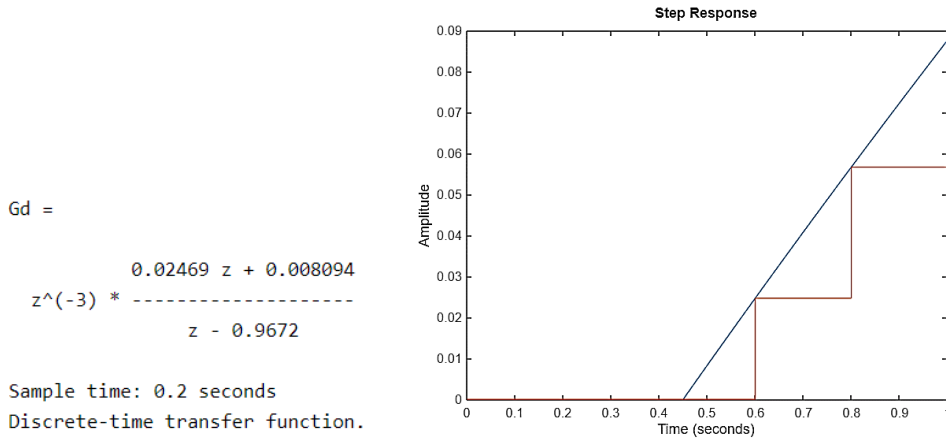


Fig. 1.20 Comparación de la respuesta temporal de un modelo de tiempo continuo y su aproximación discreta con un retardo que no es múltiplo del período de muestreo

En el caso de un retardo $\tau = d \cdot T_s + \tau'$ se puede ver que no es múltiplo del período de muestreo se obtiene un retardo puro adicional y una función de transferencia propia; es decir, τ' introduce en el modelo discreto un retardo puro y no un retardo intrínseco. La figura anterior muestra la razón para el aumento del retardo puro. En definitiva, el retardo total nk está dado por la siguiente expresión:

$$nk = \left\lfloor \frac{\tau}{T_s} \right\rfloor + 1 \quad (1.54)$$

En general, el retardo total incluye todas las opciones de retardo posibles del modelo, dado que hay casos como el siguiente, donde el retardo intrínseco carece de sentido (el retardo total es igual a 1 y el retardo puro es igual a 2) y el modelo se puede explicar solo como la discretización de un modelo continuo que lleva a polos discretos muy cercanos al origen:

$$G(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{(z + a_1)(z + \varepsilon_1)(z + \varepsilon_2)} \simeq \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^2(z + a_1)} \varepsilon_i \simeq 0$$

Ejemplo de MATLAB:

```
G = zpk([], [-1, -100, -100], 10000); Gd = c2d(G, 0.1);
```

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

Gd =

$$\frac{0.076796 (z+0.0001808) (z+0.2388)}{(z-0.9048) (z-4.54e-05)^2}$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

La relación entre las variables s y z está dada por la expresión (1.43), por lo cual, dando diferentes valores a la variable s se obtienen los respectivos valores de la variable z , de acuerdo con la siguiente expresión:

$$z = e^{sT_s} = e^{(\alpha+i\beta)T_s} = e^{\alpha T_s} e^{i\beta T_s} = |z|e^{i\varphi}$$

$$|z| = e^{\alpha T_s}, \quad \varphi = \beta T_s$$

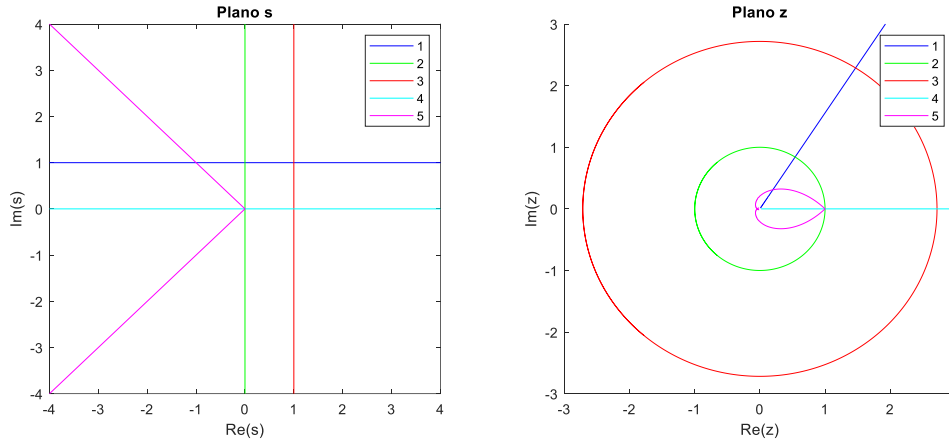


Fig. 1.21 Relación entre las variables s y z

Si $\alpha = 0$ y β toma valores en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, entonces $|z| = 1$ y φ es un ángulo que toma valores en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, lo cual corresponde a un círculo unitario. Es decir, al eje imaginario ($\alpha = 0$) le corresponde un círculo unitario, al semiplano izquierdo ($\alpha < 0$) le corresponde la región interna del círculo unitario y al semiplano derecho ($\alpha > 0$) le corresponde la región externa del círculo unitario. Para los anteriores y otros valores de α y β , la Fig. 1.21 muestra la relación. Un hecho particular es que si $T_s \rightarrow 0$,

entonces $z \rightarrow 1$, es decir, *no es una buena idea muestrear con un período muy pequeño*, dado que las raíces discretas tenderán al círculo unitario y la estabilidad relativa no será la mejor.

Ver los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.12 y 1.16 en la web del libro.

1.7.3 Interpretación de la función de transferencia

La función de transferencia puede interpretarse tanto como una **respuesta al impulso** o una **secuencia de ponderación** de la entrada. En efecto, en el primer caso, si se supone que la entrada es un impulso unitario $\delta(t)$ o $\delta(k)$, para el caso continuo o discreto respectivamente, la transformada es igual a 1 y la respuesta temporal corresponde a la inversa de la función de transferencia, es decir:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s), & g(t) &= y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ Y(z) &= G(z), & g(k) &= y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} \end{aligned} \quad (1.55)$$

De esta manera, para el caso discreto se tiene, según la definición de transformada z :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots$$

La sumatoria puede obtenerse por división larga (ver sección 1.6.4), de manera que cuando $y(0) = 0$, entonces $g(0) = 0$. Esto implica que la fracción es estrictamente propia. De otro lado, de la definición de función de transferencia continua se tiene la siguiente expresión utilizando el **teorema de convolución**:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} * \mathcal{L}^{-1}\{u(t)\} = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Para el caso discreto se tiene:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)U(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{g(k)\} * \mathcal{Z}^{-1}\{u(k)\} = \sum_{i=0}^k g(i)u(k-i)$$

La **función de ponderación** es una función continua $w(t)$ o discreta $w(k)$ que se utiliza en integrales y sumatorias para dar a algunos elementos más peso en el resultado. En los dos casos anteriores se observa que si se tiene $g(t)$ o $g(k)$, cada una de las cuales juega el papel de una función de pesos o ponderaciones de la entrada en cada instante del tiempo, es posible encontrar la respuesta temporal a cualquier tipo de entrada. El gráfico de la respuesta al impulso es una representación gráfica de la secuencia de ponderación, la cual, para el caso de sistemas asintóticamente estables es una secuencia que converge a cero, y para sistemas discretos corresponde a un **filtro IIR** (*Infinite Impulse Response*, Respuesta infinita al impulso, filtro cuya salida tiene un número infinito de términos) que se puede aproximar con un número finito de términos con un **filtro FIR** (*Finite Impulse Response*, Respuesta infinita al impulso, filtro cuya salida tiene un número finito de términos), dado que a partir de cierto valor los demás términos son tan pequeños que se pueden despreciar.

Un **filtro de señales** es un sistema dinámico que transforma una señal dependiendo de la forma de su respuesta frecuencial (sección 3.7). De esta manera, las señales se pueden manipular por medio de filtros a través de los cuales pasan las señales y a la salida se obtiene una señal modificada. Un filtro analógico se construye con componentes físicos (circuitos eléctricos, por ejemplo), mientras que un filtro digital se construye en un dispositivo digital por medio de ecuaciones matemáticas. Tipos de filtro: pasabajas (sección 3.7.5), pasaltas, pasabanda, muesca, multibanda.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.13 y 1.26, y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.15 en la web del libro.

1.8 Ecuaciones en el espacio de estado

En las anteriores secciones se presentaron dos métodos matemáticos para el estudio de los sistemas dinámicos: las ecuaciones diferenciales o en diferencias y la función de transferencia. Aunque las ecuaciones diferenciales y en diferencias pueden aplicarse a sistemas no lineales, su ventaja está en el estudio de los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) y la generalización e interpretación de sus soluciones analíticas. De otro lado, la función de transferencia es un método solo para sistemas LTI. En esta sección se presenta el método del espacio de estado y de la ecuación de estado, el cual es el más general para modelar y simular sistemas lineales y no lineales con

parámetros concentrados. En el capítulo 2 se utilizan las ecuaciones de estado para la modelación y simulación.

1.8.1 *Conceptos básicos*

El método de las variables de estado es un poderoso método para la modelación matemática en el dominio del tiempo de sistemas dinámicos lineales y no lineales, invariantes o variables en el tiempo, MIMO o SISO, dado que contiene la mayor información posible dada por sus variables de estado. Al modelo obtenido se le llama **modelo interno**, dado que entrega toda la información interna del sistema, aunque solo se midan algunas de sus variables o una combinación de ellas. A la función de transferencia y a la ecuación diferencial se le denomina **modelos externos**, pues solo interesa cómo se comportan las variables de salida (medidas) ante una variable de entrada determinada.

Las **variables de estado** $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de un sistema dinámico son el conjunto *mínimo* de n variables tales que su conocimiento en un momento inicial t_0 , junto con las variables de entrada en un momento $t \geq t_0$, determinan totalmente el comportamiento futuro del sistema. Un modelo puede tener más de las variables necesarias (algunas variables son linealmente dependientes), pero solo las *variables linealmente independientes* son las variables de estado. Las variables de estado generalmente corresponden a grados de libertad (sección 1.1). El **orden** n de un modelo está dado por esas n variables de estado, lo cual corresponde a una realización mínima del modelo. El **estado** de un sistema dinámico corresponde al valor numérico de las variables de estado en un instante determinado t_1 :

$$\mathbf{x}(t_1) = [x_1(t_1) \quad x_2(t_1) \quad \dots \quad x_n(t_1)]^T$$

Por ejemplo, si el comportamiento de un sistema puede describirse completamente por su posición y velocidad, entonces su estado en un momento determinado puede ser: (1 m, 0.8 m/s).

Cada una de las variables de estado conforman un espacio n -dimensional llamado **espacio de estado**. Una **trayectoria de estado** es una secuencia de puntos en el espacio de estado. En la Fig. 1.22 se muestra un espacio de estado de dos dimensiones (llamado, en ese caso particular, **espacio de fase**) y una trayectoria de estado para unas condiciones iniciales determinadas, dadas por el punto rojo. Un punto sobre la trayectoria de estado representa un estado

del sistema. La trayectoria de estado representa una idea de movimiento diferente al de la dependencia temporal de cada variable, cada una de las cuales se muestra en la Fig. 1.23 (se invita al lector a ver la relación entre ambas figuras); sin embargo, es importante resaltar que de una trayectoria de estado no se puede deducir la escala de tiempo de las respuestas temporales.

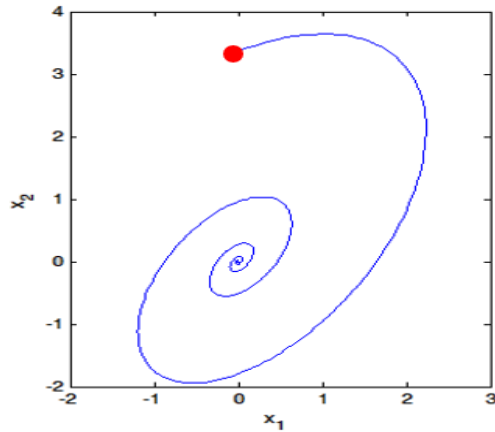


Fig. 1.22 Ejemplo de un espacio de estado y una trayectoria de estado

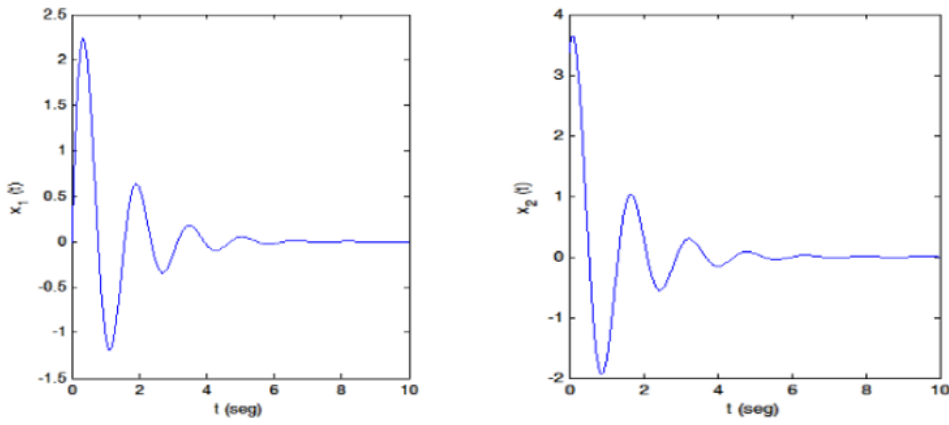


Fig. 1.23 Ejemplo de la dependencia del tiempo de las variables de estado (ver Fig. 1.22)

Las variables de estado se pueden agrupar en un **vector de estado**:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T \quad (1.56)$$

La **ecuación de estado** es un modelo matemático dado por un sistema de ecuaciones diferenciales (dinámicas) de primer orden que relaciona las variables de estado, tanto en tiempo continuo como discreto:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \dot{x}_i(t) &= f_i[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)] \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \\ x_i(k+1) &= f_i[x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)] \end{aligned} \quad (1.58)$$

En las expresiones anteriores, \mathbf{u} representa el **vector de entrada**, con cada una de las m entradas (variable manipulable) del sistema dinámico:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]^T \quad (1.59)$$

La **ecuación de salida** de un sistema dinámico es el sistema de ecuaciones algebraicas (estáticas) que relacionan las p variables de salida (variables medibles u observables), dadas en el **vector de salida** \mathbf{y} , con las n variables de estado (variables internas) y las m variables de entrada (variables manipulables):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ y_j(t) &= g_j[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)] \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \\ y_j(k) &= g_j[x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)] \end{aligned} \quad (1.61)$$

Donde

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_p]^T \quad (1.62)$$

Las **ecuaciones en el espacio de estado** son el conjunto de la ecuación de estado y ecuación de salida para la modelación matemática de un sistema dinámico:

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \end{cases} \quad (1.63)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \end{cases} \quad (1.64)$$

Las ecuaciones en el espacio de estado con el mismo **retardo** continuo τ o **retardo puro** discreto d (ver sección 1.4.1) en cada variable de entrada tienen la siguiente forma (en este libro se trata solo el retardo en las entradas, pero es posible utilizar retardos en las variables de estado):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t - \tau)] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t - \tau)] \end{cases} \quad (1.65)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k - d)] \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k - d)] \end{cases} \quad (1.66)$$

Las dos expresiones anteriores se simplifican considerablemente para el caso lineal invariable en el tiempo, en cuyo caso las ecuaciones toman las siguientes formas:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t - \tau) \end{cases} \quad (1.67)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^{n \times 1}, & \mathbf{u}(t) &\in \mathbb{R}^{m \times 1}, & \mathbf{y}(t) &\in \mathbb{R}^{p \times 1} \\ \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & \mathbf{B} &\in \mathbb{R}^{n \times m}, & \mathbf{C} &\in \mathbb{R}^{p \times n}, & \mathbf{D} &\in \mathbb{R}^{p \times m} \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k - d) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k - d) \end{cases} \quad (1.68)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &\in \mathbb{R}^{n \times 1}, & \mathbf{u}(k) &\in \mathbb{R}^{m \times 1}, & \mathbf{y}(k) &\in \mathbb{R}^{p \times 1} \\ \mathbf{\Phi} &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & \mathbf{\Gamma} &\in \mathbb{R}^{n \times m}, & \mathbf{C} &\in \mathbb{R}^{p \times n}, & \mathbf{D} &\in \mathbb{R}^{p \times m} \end{aligned}$$

En la sección 1.8.6 se muestra la equivalencia entre los dos modelos anteriores. En la sección 3.4 se muestra el proceso de linealización para transformar un modelo no lineal en uno lineal, pero válido solo cerca a cierto estado de interés.

TABLA 1.5 VARIABLES DE ESTADO FÍSICAS A PARTIR DE LOS ELEMENTOS ALMACENADORES DE ENERGÍA

Elemento almacenador de energía	Energía	Variable de estado física
Capacitor C	$CV^2/2$	Voltaje V
Inductor L	$Li^2/2$	Corriente i
Masa en movimiento m	$mv^2/2$	Velocidad v
Masa en reposo m	mgh	Posición o altura h
Momento de inercia J	$J\omega^2/2$	Velocidad angular ω
Resorte k	$kx^2/2$	Elongación x
Condensador térmico C	$CT^2/2$	Temperatura T
Densidad del líquido ρ en un tanque	ρgh	Nivel del tanque h

Las variables de estado pueden ser de varios tipos, cada una de las cuales se ejemplifica a lo largo del libro:

- **Variables físicas de estado:** variables con significado físico conocido y que corresponden, generalmente, a elementos almacenadores de energía (TABLA 1.5). Estas son las variables que generalmente se utilizan en la representación de sistemas dinámicos reales y en la simulación, dado que hay interés en que las variables internas tengan significado. Estas variables son las más utilizadas a lo largo de este libro.
- **Variables de fase:** variables que corresponden a una variable dependiente y sus primeras $(n - 1)$ derivadas (ver sección 1.8.2). Estas variables no siempre tienen significado físico y se utilizan en procesos matemáticos, como la obtención de la ecuación de estado a partir de la ecuación diferencial, donde no interesa el comportamiento interno.

- **Variables canónicas:** para el caso lineal, son las variables seleccionadas de una manera especial para efectos de análisis o diseño. Por ejemplo, se tienen las variables en una forma canónica diagonal o de Jordan (sección 1.8.7), forma canónica controlable u observable (sección 4.10.5), entre otras. La palabra **canónico** en ciencia se usa para indicar una elección especial, estándar, simple, ideal y natural de una serie de convenciones posibles; es algo estándar y no arbitrario.

Como se mostrará en la sección 1.8.7 (transformaciones lineales), las formas anteriores son equivalentes matemáticamente y de ellas se puede obtener las mismas conclusiones, pero cada una tiene sus respectivas ventajas.

Finalmente, las ecuaciones en el espacio de estado son la base para la simulación (capítulo 2), utilizando los llamados diagramas de estado, los cuales utilizan el concepto de **integrador** (caso continuo) u operador de desplazamiento hacia atrás (caso discreto) y que se describen en la sección 2.6.

En el capítulo 7 se explican varias ecuaciones de estado en variables físicas, las cuales se resumen a continuación.

Ejemplo de una ecuación de estado no lineal de tiempo continuo (no se puede llevar a la forma matricial):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{u}{ml} \end{cases} \quad y = x_1$$

El siguiente es un ejemplo de una ecuación de estado lineal de tiempo continuo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{f_1 + f_3}{m_1} & \frac{f_3}{m_1} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{f_3}{m_2} & -\frac{f_2 + f_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Este es un ejemplo de una ecuación de estado no lineal de tiempo discreto en diferencias hacia delante y un período de muestreo igual a T_s , el modelo lineal no se puede expresar de forma matricial:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T_s x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{gT_s}{l} \sin x_1(k) + \left(1 - \frac{fT_s}{m}\right) x_2(k) + \frac{T_s}{ml} u(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

La ecuación de estado lineal anterior en forma matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -\frac{gT_s}{l} & 1 - \frac{fT_s}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_s}{ml} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k), \quad y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

En los ejemplos anteriores $\mathbf{D} = 0$, lo cual es equivalente a una función de transferencia estrictamente propia, algo común en los procesos, pero no en el diseño de controladores, donde puede darse que $\mathbf{D} \neq 0$ o que la función de transferencia sea propia. En las siguientes secciones se tratan más a fondo los temas relacionados con la ecuación de estado lineal con coeficientes constantes, lo cual permite entender mejor el comportamiento de los sistemas lineales, aunque sea en una región cerca de un estado de interés (los modelos no lineales no se pueden resolver).

1.8.2 Ecuación de estado a partir de la ecuación diferencial o en diferencias

La ecuación de estado es el método más general de modelación matemática y es aplicable a sistemas lineales y no lineales, de tiempo continuo y discreto. Por lo tanto, la transformación de cualquier modelo a una ecuación de estado es una operación importante. Además, como se estudia en la sección 2.6, la ecuación de estado es la base para la simulación (métodos numéricos), dado que solo es necesario desarrollar métodos numéricos para ecuaciones diferenciales de primer orden. El método general de transformación de una ecuación diferencial o en diferencias a una ecuación de estado se basa en el concepto de las variables de fase, mencionadas en la sección anterior. En primer lugar, se presenta el método para el caso cuando el término

independiente no depende de las derivadas de la entrada y más adelante cuando sí depende, algo que lleva al concepto de ceros, tal y como se explica en la sección 1.4.2. Sea la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$F\left(t, u, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, {}^{(n)}y\right) = 0, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad {}^{(n)}y = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Con respecto a la derivada de mayor orden, la ecuación tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} {}^{(n)}y = f\left(t, u, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, {}^{(n-1)}y\right) \\ y(0) = y_{01}, \dot{y}(0) = y_{02}, \dots, {}^{(n-1)}y(0) = y_{0n} \end{cases} \quad (1.69)$$

Se definen las siguientes **variables de fase**:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad \dots \quad x_n = {}^{(n-1)}y \quad (1.70)$$

Derivando cada una de las variables de estado anteriores y reemplazando en la última ecuación la ecuación (1.69) se obtiene la **ecuación de estado en variables de fase**:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(t, u, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, u, \mathbf{x}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.71)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ {}^{(n-1)}y(0) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de estado se pueden representar gráficamente utilizando diagramas de estado (sección 2.6), lo cual es útil para la solución numérica y la simulación de sistemas dinámicos.

Para el caso lineal con coeficientes constantes la ecuación diferencial es:

$${}^{(n)}y + a_1 {}^{(n-1)}y + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u(t)$$

La respectiva ecuación de estado es:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (1.72)$$

En el caso de la ecuación en diferencias se obtiene una expresión similar, la cual se presenta para el caso lineal:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = u(k)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

Cuando la ecuación diferencial tiene derivadas de la variable de entrada y el término independiente es lineal, las variables de fase se definen de manera diferente para evitar que la ecuación de estado contenga derivadas de la entrada. El método general para un término independiente con una derivada de orden $r < n$ de la entrada consiste en introducir en la última variable de fase x_n las derivadas de la entrada hasta $(r-1)$ y en las anteriores variables de estado las derivadas de la entrada con un orden menor, de manera triangular. El paso de una ecuación en diferencias con diferencias en la entrada a una ecuación de estado de tiempo discreto se hace de una manera similar. Otra forma de realizar la transformación cuando las condiciones iniciales son iguales a cero es convertir la ecuación diferencial o ecuación en diferencias a una función de transferencia y de ahí pasar a la ecuación de estado, tal y como se explica en la sección 1.9.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.15 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.18 en la web del libro.

1.8.3 *Solución de la ecuación de estado homogénea lineal de tiempo continuo por valores y vectores propios*

La ecuación de estado lineal con coeficientes constantes (LTI) se puede resolver por varios métodos, cada uno de los cuales se presenta a continuación [9]. El método más directo, pero menos interesante, en el caso SISO consiste en convertir la ecuación de estado en una sola ecuación diferencial ordinaria y resolverla (un proceso que solo da la solución de la variable de salida y no de todas las variables internas de estado). Aunque en la práctica la herramienta más utilizada para la solución de estas ecuaciones son los métodos numéricos (simulación) para la obtención de una solución numérica, la solución analítica permite comprender mejor el comportamiento general de la solución en dependencia de los parámetros del modelo. Además, es necesario resolver muchas ecuaciones por el método propuesto para así dominar la técnica matemática y poder concentrarse en el análisis del resultado y desarrollar la intuición matemática (un buen dominio de la técnica implica visualizar la forma de la solución en casos simples sin requerir la realización de los cálculos). A continuación, se resuelve la ecuación de estado por el método de los **valores y vectores propios** (la ecuación de salida no se requiere o se puede asumir que la salida es todo el estado). Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias (sección 1.2), se resuelve primero la ecuación homogénea, sin el término independiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \tag{1.74}$$

De manera similar a las ecuaciones diferenciales, donde la solución de la ecuación homogénea se obtiene en la forma $y = e^{\lambda t}$ que conduce a la ecuación característica, la solución de la ecuación anterior se puede hallar de la siguiente manera, donde, dado que \mathbf{x} es un vector, la solución debe incluir un vector \mathbf{v} :

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t} \quad (1.75)$$

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación homogénea se obtiene:

$$\lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

Cancelando el término exponencial:

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}$$

Organizando los términos:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v} = 0 \quad (1.76)$$

La ecuación anterior tiene una solución con vectores no nulos si y solamente si:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (1.77)$$

Las ecuaciones anteriores corresponden al problema de valores y vectores propios y la ecuación (1.77) es la misma ecuación característica de la ecuación diferencial ordinaria, algo de esperar, dada la correspondencia entre la ecuación de estado y la ecuación diferencial. Los valores propios corresponden a los polos de la función de transferencia o raíces características de la ecuación diferencial (los ceros de un modelo MIMO se tratan en la sección 1.4.2). Por lo tanto, se deben analizar tres posibles casos de valores propios: (1) reales sin repetir, (2) complejos sin repetir y (3) repetidos. En el caso de valores propios reales sin repetir la solución de la ecuación de estado homogénea es:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots \quad (1.78)$$

En el caso de valores propios complejos ($\lambda = \alpha + i\beta$ y su conjugada), se tiene:

$$\mathbf{x} = c_1 \text{Re}\{\mathbf{v}_1 e^{\lambda t}\} + c_2 \text{Im}\{\mathbf{v}_1 e^{\lambda t}\} + \dots \quad (1.79)$$

Si se tienen valores propios repetidos con una multiplicidad geométrica igual a la multiplicidad algebraica, entonces se aplican las dos expresiones anteriores sin ningún problema. En caso contrario, la solución toma la siguiente forma (en el caso de valores propios complejos se expresa la función exponencial como seno y coseno):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + c_2 (\mathbf{v} t + \mathbf{v}_{g1}) e^{\lambda t} + c_3 \left(\frac{1}{2!} \mathbf{v} t^2 + \mathbf{v}_{g1} t + \mathbf{v}_{g2} \right) e^{\lambda t} + \dots \\
 &= (c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{v}_{g1} + \dots) e^{\lambda t} + (c_2 \mathbf{v} + c_3 \mathbf{v}_{g1} + \dots) t e^{\lambda t} \quad (1.80) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} (c_3 \mathbf{v} + c_4 \mathbf{v}_{g1}) t^2 e^{\lambda t} + \dots
 \end{aligned}$$

Donde \mathbf{v} es el vector propio y \mathbf{v}_{gi} conforman los vectores propios generalizados. En efecto, si se busca una segunda solución en la forma $\mathbf{x} = (\mathbf{v} t + \mathbf{a}) e^{\lambda t}$ (con $\mathbf{a} = 0$, de manera similar a las ecuaciones diferenciales, no se obtiene una solución):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} e^{\lambda t} + \lambda (\mathbf{a} + \mathbf{v} t) e^{\lambda t}$$

Reemplazando en la ecuación de estado, destruyendo los paréntesis y agrupando se tiene:

$$\mathbf{v} e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{a} e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{v} t e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{a} e^{\lambda t} + \mathbf{A} \mathbf{v} t e^{\lambda t}, \quad (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{a} = -\mathbf{v}$$

El último término corresponde a la forma de los valores propios generalizados, es decir,

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_g$$

La **multiplicidad algebraica** (ma) es igual al número de veces que un valor propio es solución de la ecuación característica. Para el caso de un valor propio múltiple, el número de vectores propios linealmente independientes que le corresponden se denomina **multiplicidad geométrica** (mg):

$$\text{mg}(\lambda) = n - \text{rank}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \leq \text{ma}(\lambda) \quad (1.81)$$

La multiplicidad geométrica (mg) es igual o menor que la multiplicidad algebraica (ma). Si la multiplicidad geométrica es menor que la algebraica se dice que el valor propio es defectuoso y es necesario completar el conjunto de vectores linealmente independientes con los llamados **vectores propios generalizados**, los cuales se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_{i1} &= 0 \\
 (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_{i2} &= -\mathbf{v}_{i1}, \quad (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_{i3} = -\mathbf{v}_{i2}, \dots
 \end{aligned} \quad (1.82)$$

Las expresiones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma, donde $\mathbf{F}(t)$ es la **matriz fundamental** y su determinante corresponde al **wronskiano**, el cual debe ser diferente de cero en un intervalo (igual al eje real para el caso de ecuaciones de estado con coeficientes constantes) para que las soluciones sean linealmente independientes (por lo tanto, la inversa de la matriz \mathbf{F} existe para todo valor de t):

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{F}(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{F}(t) = [\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Para las condiciones iniciales en $t = 0$ se tiene:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{F}(0)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

De esta manera, la solución de la ecuación de estado homogénea se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad (1.83)$$

Donde $\Phi(t)$ es la **matriz de transición del estado**, la cual se analiza con detalle en la sección 1.8.5:

$$\Phi(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(0)\mathbf{F}(0) = \Phi(t)\mathbf{F}(0)\mathbf{F}^{-1}(0) = \mathbf{F}^{-1}(0)\Phi^{-1}(t) \quad (1.84)$$

Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados o el método de variación de las constantes. El método de coeficientes indeterminados se aplica cuando el término independiente $\mathbf{Bu}(t)$ tiene esta forma (combinación de polinomios, exponenciales, senos, cosenos o cierta combinación de dichas funciones), donde \mathbf{p}_i y \mathbf{q}_i son vectores columna):

$$\mathbf{Bu}(t) = e^{\alpha t}[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 t + \dots) \cos \beta t + (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 t + \dots) \sin \beta t] \quad (1.85)$$

En ese caso la solución tiene la siguiente forma, donde \mathbf{a}_i y \mathbf{b}_i son vectores columna con coeficientes indeterminados:

$$\mathbf{x}_{nh}(t) = e^{\alpha t}[(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 t + \dots) \cos \beta t + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 t + \dots) \sin \beta t] \quad (1.86)$$

Si parte de la solución no homogénea está r veces en la solución homogénea, entonces es necesario aumentar el grado de los polinomios en la expresión anterior en r grados.

En el método de variación de las constantes se propone hallar la solución en una forma donde se cambian las constantes arbitrarias por funciones. Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{c}$$

Se busca la solución en la forma:

$$\mathbf{x}_{nh}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t)$$

Se deriva la solución particular y se reemplaza en la ecuación no homogénea:

$$\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Dado que $\mathbf{F}(t)$ satisface la ecuación de estado, entonces $\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)$ y reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathbf{A}\mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Simplificando:

$$\mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Despejando:

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Integrando:

$$\mathbf{C}(t) = \int \mathbf{F}^{-1}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La solución de la ecuación no homogénea es:

$$\mathbf{x}_{nh}(t) = \mathbf{F}(t) \int \mathbf{F}^{-1}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La solución general de la ecuación de estado no homogénea es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{c} + \mathbf{F}(t) \int \mathbf{F}^{-1}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Utilizando las condiciones iniciales, además de la expresión (1.84) y una de las propiedades de matriz de transición del estado dada en la sección 1.8.5 ($\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$), se llega a la siguiente forma, en términos de la matriz de transición del estado:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Phi(t) \int_0^t \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.87)$$

Como en (1.84), se tiene que $\Phi(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^{-1}(0)$. Se observa que $\Phi(t)$ no depende del término independiente y puede hallarse a partir de la solución de la ecuación homogénea.

En la sección 1.8.7 se presenta un método para transformar la ecuación de estado a una forma especial, la cual es más simple de resolver. Por ejemplo, si se puede llevar la matriz \mathbf{A} de la ecuación de estado a una forma diagonal, entonces una ecuación de orden n se reduce a la solución de n ecuaciones diferenciales lineales de orden 1, mucho más simples de resolver.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.16 a 1.19, y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.19 en la web del libro.

1.8.4 Solución de la ecuación de estado lineal de tiempo continuo por transformada de Laplace

La solución de la ecuación de estado lineal de tiempo continuo por el método de la transformada de Laplace (sección 1.3) es más directo y sencillo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Transformada de Laplace de cada término:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\}$$

Sea la siguiente matriz (llamada **matriz de transición del estado**):

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} \quad (1.88)$$

Aplicando el teorema de convolución de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} * \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\} \\ &= \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.89)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la matriz de transición del estado $\Phi(t)$ que se exponen a continuación en la sección 1.8.5, se obtiene la misma expresión de la ecuación (1.87). Cambiando el tiempo inicial a t_0 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.90)$$

De la expresión (1.89) se puede ver que cuando la entrada es un escalon e igual a una función delta de Dirac (sección 1.3) $\delta(t)$, entonces el modelo es equivalente a uno sin entrada y con condiciones iniciales iguales a $[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}]$. Es decir, una entrada extremadamente grande al inicio incrementa las condiciones iniciales en un valor finito que depende de la matriz \mathbf{B} :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \Phi(t)\mathbf{B}$$

Lo cual equivale a la solución de la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}$$

Se invita al lector a obtener la matriz de transición del estado de los ejemplos de la sección anterior utilizando la transformada de Laplace.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.20 y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.20 en la web del libro.

1.8.5 *Matriz de transición del estado y el método de las series de potencias*

La matriz de transición de estado, dada por las ecuaciones (1.84) y (1.88), juega un papel importante tanto en la solución de la ecuación de estado como en su discretización (sección 1.8.6), por lo que es importante conocer sus propiedades. Dicha matriz se puede calcular por medio de una serie de potencias, tal y como se muestra a continuación. Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

La solución de esta ecuación se busca ahora por medio de una serie de potencias:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \dots$$

Derivando:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t + 3\mathbf{a}_3 t^2 + \dots$$

Reemplazando en la ecuación de estado:

$$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t + 3\mathbf{a}_3 t^2 + \dots = \mathbf{A}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \dots)$$

Iguando los términos semejantes:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}\mathbf{A}^3\mathbf{a}_0 \dots$$

Reemplazando en solución en forma de serie se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{a}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{a}_0 t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\mathbf{A}^3\mathbf{a}_0 t^3 + \dots$$

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\mathbf{A}^3 t^3 + \dots \right) \mathbf{a}_0$$

En $t = 0$ se tiene:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}_0$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\mathbf{A}^3t^3 + \dots \right) \mathbf{x}(0)$$

La solución de la ecuación de estado homogénea es, según las ecuaciones (1.83) y (1.89):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$$

Comparando se llega a la siguiente expresión:

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} \quad (1.91)$$

En el caso escalar, la serie anterior corresponde a una función exponencial, pero no tiene sentido para el caso matricial (un escalar elevado a una matriz no tiene significado matemático). Sin embargo, y por analogía, a la serie anterior se le denomina la **matriz exponencial** (o exponencial de una matriz o exponencial matricial) y se le representa como $e^{\mathbf{A}t}$, aunque solo debe entenderse como una representación de la serie de potencia (coincidentalmente, y para fines mnemotécnicos, la mayoría de las propiedades se pueden obtener si se considera que $e^{\mathbf{A}t}$ es una función exponencial):

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots$$

Las propiedades de la matriz de transición del estado se muestran en la TABLA 1.6 y se obtienen a partir de su representación en serie de potencias y la operación con series.

La primera expresión se obtiene directamente haciendo $t = 0$ en la serie. La quinta propiedad se obtiene derivando la serie, sacando \mathbf{A} como factor común e identificando que lo que queda corresponde de nuevo a Φ . Si la sexta propiedad es correcta, entonces haciendo $\tau = -t$ se obtiene la segunda propiedad; aplicándola m veces con $\tau = t$ se obtiene la cuarta propiedad; haciendo $t = t_2 - t_1$ y $\tau = t_1 - t_0$ se obtiene la tercera propiedad. La séptima propiedad se demuestra de manera semejante a la sexta propiedad. Por lo tanto, demostrando la sexta propiedad se deducen las otras tres (y una cuarta). La sexta propiedad se obtiene operando con las series:

$$\Phi(t)\Phi(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j \tau^j}{j!}$$

TABLA 1.6 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN DEL ESTADO

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Phi(0) = \mathbf{I}e^0 = \mathbf{I} \\ (2) \quad & \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) & (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \\ (3) \quad & \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_o) = \Phi(t_2 - t_o) & e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}e^{\mathbf{A}(t_1-t_o)} \\ & = e^{\mathbf{A}(t_2-t_o)} \\ (4) \quad & [\Phi(t)]^m = \Phi(mt) & (e^{\mathbf{A}t})^m = e^{\mathbf{A}mt} \\ (5) \quad & \frac{d\Phi(t)}{dt} = \mathbf{A}\Phi(t) & \frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \\ (6) \quad & \Phi(t + \tau) = \Phi(t)\Phi(\tau) & e^{\mathbf{A}(t+\tau)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} \\ (7) \quad & e^{\mathbf{A}_1 t}e^{\mathbf{A}_2 t} = e^{(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)t} \quad \text{sii} \quad \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \end{aligned}$$

El producto de Cauchy de dos series infinitas es (se puede demostrar por inducción matemática):

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$$

Teniendo en cuenta el producto de Cauchy de dos series convergentes y multiplicando y dividiendo por $k!$:

$$\Phi(t)\Phi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{\mathbf{A}^l t^l}{l!} \frac{\mathbf{A}^{k-l} \tau^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k! t^l \tau^{k-l}}{l! (k-l)!}$$

Fórmula del binomio de Newton:

$$(t + \tau)^n = \sum_{l=0}^k \frac{k! t^l \tau^{k-l}}{l! (k-l)!}$$

Por lo tanto:

$$\Phi(t)\Phi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k (t + \tau)^k}{k!} = \Phi(t + \tau)$$

Si \mathbf{A} es una matriz diagonal, entonces:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n t} \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

1.8.6 Discretización de la ecuación de estado de tiempo continuo

Al igual que la discretización de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y una función de transferencia (secciones 1.5 y 1.7.2, respectivamente), se muestra a continuación el proceso de discretización de una ecuación de estado, inicialmente sin retardo (la ecuación de salida es una ecuación algebraica y solo se requiere tomar sus valores en los instantes de muestreo). Como en los dos casos anteriores, aquí también se asume el uso de un retenedor de orden cero y la correcta selección del período de muestreo. Se parte de la ecuación (1.90):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Tomando $t_0 = kT_s$ y $t = (k + 1)T_s$, con un retenedor de orden cero, lo cual garantiza que la entrada permanece constante entre dos instantes de muestreo, se obtiene:

$$\mathbf{x}((k + 1)T_s) = \Phi(T_s)\mathbf{x}(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi((k + 1)T_s - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Entre instantes de muestreo $\mathbf{u}(\tau)$ permanece constante e igual a $\mathbf{u}(kT_s)$:

$$\mathbf{x}((k + 1)T_s) = \Phi(T_s)\mathbf{x}(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi((k + 1)T_s - \tau) d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}(kT_s)$$

La integral se puede simplificar con un cambio de variables $\theta = (k + 1)T_s - \tau$:

$$\int_{kT}^{(k+1)T_s} \Phi((k+1)T_s - \tau) d\tau = \int_0^{T_s} \Phi(t) dt$$

La ecuación de estado discreta y la ecuación de salida son:

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T_s) = \Phi \mathbf{x}(kT_s) + \Gamma \mathbf{u}(kT_s) \\ \mathbf{y}(kT_s) = \mathbf{C} \mathbf{x}(kT_s) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT_s) \end{cases}$$

Omitiendo el período de muestreo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{cases}$$

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T_s}, \quad \Gamma = \int_0^{T_s} \Phi(t) dt \mathbf{B} \quad (1.93)$$

Ahora se discretiza el modelo con retardo (1.67), donde se asume que todas las entradas tienen el mismo retardo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t - \tau) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t - \tau) \end{cases}$$

Cuando el retardo es un múltiplo del período de muestreo ($\tau = d \cdot T_s$) el modelo discreto tiene la siguiente forma, lo cual equivale a tener z^{-d} en la función de transferencia, tal y como se explica en la sección 1.7.2 y expresión (1.52):

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k-d) \quad (1.94)$$

Para el caso cuando el retardo no es un múltiplo del período de muestreo ($\tau = d \cdot T_s + \tau'$), el problema se puede dividir en dos partes: el retardo entero d más un retardo τ' menor que el período de muestreo. A continuación, se discretiza el modelo con un retardo $\tau = \tau' < T_s$ ($d = 0$). Se parte de la solución continua con una entrada con retardo:

$$\mathbf{x}((k+1)T_s) = \Phi(T_s)\mathbf{x}(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi((k+1)T_s - t) \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau) dt$$

Debido a que el retardo hace que la entrada quede entre dos instantes de muestreo, es necesario dividir la integral en dos partes:

$$\begin{aligned} & \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \Phi((k+1)T_s - t) \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \tau) dt = \\ &= \int_{kT_s}^{kT_s + \tau} \Phi((k+1)T_s - t) dt \mathbf{B}\mathbf{u}((k-1)T_s) + \int_{kT_s + \tau}^{(k+1)T_s} \Phi((k+1)T_s - t) dt \mathbf{B}\mathbf{u}(kT_s) \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema discreto con retardo menor que el período de muestreo es, omitiendo T_s en la ecuación de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma_0 \mathbf{u}(k) + \Gamma_1 \mathbf{u}(k-1) \quad (1.95)$$

Donde,

$$\Phi = \Phi(T_s), \quad \Gamma_0 = \int_0^{T_s - \tau} \Phi(t) dt \mathbf{B}, \quad \Gamma_1 = \Phi(T_s - \tau) \int_0^{\tau} \Phi(t) dt \mathbf{B}$$

Este modelo en la forma matricial tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (1.96)$$

El modelo discreto con retardo aumenta su orden en m (número de entradas con retardo) con respecto al modelo continuo, tal y como sucede con la función de transferencia, donde un retardo no polinomial $e^{-\tau/s}$ incrementa el orden en z^{-1} (lo cual equivale a tener un polo en el origen). Es importante resaltar que la ecuación de estado anterior tiene m polos en el origen, pero ese retardo no se puede expresar en un solo término de la forma $\mathbf{u}(k-1)$, sino que requiere de otro término $\mathbf{u}(k)$, como se muestra en la ecuación (1.96). Sin embargo, la función de transferencia respectiva sí muestra el retardo de 1 (ver el ejemplo siguiente). La única forma de que no se

incrementa el orden de la ecuación de estado discreta es que el retardo sea exactamente un múltiplo del período de muestreo, como en (1.94).

Para el caso general cuando $\tau = d \cdot T_s + \tau'$, se tiene una combinación de los dos casos anteriores al cambiar $k \rightarrow k - d$ en las entradas (forma que entrega MATLAB):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k-d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-(d+1)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k-d) \quad (1.97)$$

Donde,

$$d = \left\lfloor \frac{\tau}{T_s} \right\rfloor$$

La discretización también es posible con diferentes retardos en cada entrada, pero la deducción es un poco más extensa y se omite aquí (la función `c2d` de MATLAB considera todos estos casos). La expresión anterior puede llevarse a la forma (1.98) sin el retardo d , pero donde se incrementa el orden en $(d+1) \times m$, es decir, $d \times m$ variables más con respecto a dicho modelo. En [18] se encuentra la función `c2d_expand` de MATLAB para el cálculo de dicho modelo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k-d) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-(d+1)) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \quad (1.98)$$

Normalmente, las ecuaciones de estado de tiempo discreto se resuelven de manera iterativa, como en el caso de las ecuaciones en diferencias, pero también se pueden resolver de manera analítica por métodos similares a los presentados en la sección 1.8.3. Adicionalmente, se puede resolver por sustituciones progresivas, tal y como se muestra a continuación. Sea

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k)$$

Haciendo $k = k + 1$ en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+2) &= \Phi \mathbf{x}(k+1) + \Gamma \mathbf{u}(k+1) = \Phi [\Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k)] + \Gamma \mathbf{u}(k+1) \\ &= \Phi^2 \mathbf{x}(k) + \Phi \Gamma \mathbf{u}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k+1) \end{aligned}$$

Haciendo $k = k + 1$ en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+3) &= \Phi \mathbf{x}(k+2) + \Gamma \mathbf{u}(k+2) \\ &= \Phi [\Phi^2 \mathbf{x}(k) + \Phi \Gamma \mathbf{u}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k+1)] + \Gamma \mathbf{u}(k+2) \\ &= \Phi^3 \mathbf{x}(k) + \Phi^2 \Gamma \mathbf{u}(k) + \Phi \Gamma \mathbf{u}(k+1) + \Gamma \mathbf{u}(k+2) \end{aligned}$$

Y así, de manera sucesiva, se llega al siguiente término general:

$$\mathbf{x}(k+n) = \Phi^n \mathbf{x}(k) + \Phi^{n-1} \Gamma \mathbf{u}(k) + \dots + \Gamma \mathbf{u}(k+(n-1))$$

Haciendo $k = 0$, y cambiando n por k al final, en la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}(j) \quad (1.99)$$

La expresión anterior es semejante a la solución (1.89) de la ecuación de estado de tiempo continuo. Se invita al lector a llegar a la misma solución aplicando la transformada z . Dicha solución será útil para el estudio de otros temas, como el de la sección 4.10 sobre controlabilidad y observabilidad.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.21 y 1.22, y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.21 y 1.22 en la web del libro.

1.8.7 Transformaciones lineales y formas canónicas

Una ecuación de estado lineal *no es única* para un sistema, dado que se puede hacer un cambio de variables utilizando una matriz de transformación (la transformación más simple consiste en cambiar el orden de las variables de estado y renombrarlas). Una **transformación lineal** (o **transformación de similitud**) es una matriz cuadrada invertible \mathbf{T} que permite la transformación de una representación en el espacio de estado en una representación equivalente (similar), la cual conserva las propiedades básicas del modelo, tales como la ecuación característica, los valores y vectores propios (sección 1.8.3), la matriz de transición del estado, la controlabilidad y la observabilidad. El requisito de invertibilidad de una matriz cuadrada es equivalente a que sea de **rango completo** (rango igual al número de filas o columnas). Sin embargo, una matriz puede ser de rango completo y tener filas o columnas muy similares, lo cual significa que está mal condicionada.

El **número de condición** $\text{cond}(\mathbf{M})$ de una matriz es un valor que indica qué tan cerca está una matriz de tener filas o columnas linealmente dependientes. Un valor cercano a 1 indica que la matriz está bien condicionada, pero entre más grande sea ese número más mal condicionada está y más sensibles son los resultados, que impliquen su inversa, a pequeños cambios de la matriz original. Por lo tanto, en los problemas que requieren del cálculo del rango se debe realizar también un cálculo del número de condición. Cálculo con MATLAB:

```
cond_number = cond(A, p) % p es el tipo de norma (por defecto p = 2)
```

Algunas transformaciones lineales permiten convertir el modelo a una estructura llamada forma canónica que puede tener ventajas en cierto tipo de problemas. Sea la siguiente ecuación de estado a transformar:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.100)$$

Se puede realizar la transformación de las variables de estado de la siguiente manera (en muchos textos se utiliza $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}^*$):

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}^*(t) \quad (1.101)$$

Reemplazando (1.100) en (1.101) se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}^*\mathbf{x}^* + \mathbf{D}^*\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.102)$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{T}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D}$$

Los modelos (1.100) y (1.102) son diferentes en forma, pero tienen los mismos vectores de entrada y salida (sin asteriscos). Se puede ver, por ejemplo, que la ecuación característica y los valores propios (sección 1.8.3) no cambian con la transformación (sin embargo, dos matrices que tengan la misma ecuación característica no son necesariamente similares, dado que se pueden diferenciar en las matrices \mathbf{B} , \mathbf{C} o \mathbf{D}):

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}| = |\lambda\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}| = |\mathbf{T}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}| \\ &= |\mathbf{T}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{T}^{-1}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Aunque la matriz \mathbf{T} se puede seleccionar de manera arbitraria (con la única condición de ser invertible), lo más útil es definir dicha matriz de manera que se obtengan formas especiales de la ecuación de estado, algunas de las cuales se explican a continuación.

La **forma canónica diagonal** (FCD) es aplicable cuando los valores propios (sección 1.8.3) de la matriz \mathbf{A} son reales y tienen una multiplicidad geométrica igual a la multiplicidad algebraica (sección 1.8.3), es decir, cuando todos los vectores propios son linealmente independientes. Esta forma es interesante pues permite desacoplar los diferentes estados del sistema y tratar cada uno por separado como una ecuación separada. La respectiva transformación tiene la siguiente forma, donde \mathbf{v}_i es un vector propio:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]^{-1} \quad (1.103)$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

En la nueva representación la matriz \mathbf{A}^* tiene la forma dada en la ecuación anterior.

Por ejemplo, el siguiente sistema se puede llevar a la forma diagonal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & -2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Los valores y vectores propios son:

$$\lambda = \{-1, -2, -3\}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación es:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A}^* en la forma canónica diagonal toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si la multiplicidad geométrica de una raíz múltiple es igual a su multiplicidad algebraica, entonces el modelo también se puede diagonalizar, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo, donde $mg = n - \text{rank}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2 = ma$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -4 \\ 2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Los valores y vectores propios son:

$$\lambda = \{-1, -1, -2\}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación es:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A}^* en la forma canónica diagonal toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Cuando se tienen raíces múltiples con multiplicidad geométrica diferente de la multiplicidad algebraica, o se tienen raíces complejas, se obtiene la llamada **forma canónica de Jordan** (FCJ), una forma cuasidiagonal con bloques sobre la diagonal (los bloques de Jordan). La forma canónica diagonal es un caso especial de la forma canónica de Jordan. Por ejemplo, para una raíz λ_1 real de multiplicidad 3 (se adiciona un 1 a la derecha de las primeras raíces), dos raíces complejas ($\alpha \pm i\beta$, parte real en la diagonal principal y parte imaginaria sobre la otra diagonal) y raíces reales sin repetir, se tiene, con la misma matriz de transformación (1.103), la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (1.105)$$

En el bloque de Jordan para raíces reales múltiples, si algunos vectores propios son linealmente independientes, entonces algunos unos sobre la diagonal desaparecen. En términos de la función de transferencia, si se tienen raíces reales sin repetir, entonces se obtiene una función de transferencia que se puede desarrollar en fracciones parciales simples; si hay raíces múltiples no se obtienen fracciones simples, sino una fracción del tipo $1/(s + \lambda)^k$, la cual se puede representar como el producto de fracciones que al llevarlas a una ecuación de estado genera un bloque de Jordan con los unos sobre la diagonal principal. El siguiente ejemplo ilustra dicha situación, donde el tercer vector es un vector propio generalizado, dado que $\text{mg} = n - \text{rank}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1 < \text{ma}$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 11 & -6 \\ -3 & 6 & -4 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Los valores y vectores propios son:

$$\lambda = \{-2, -1, -1\}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación es:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A}^* en la forma canónica de Jordan toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En el caso de raíces complejas, para llegar al bloque de Jordan de la ecuación anterior es necesario tomar como vectores propios la parte real y la parte imaginaria del vector propio complejo, dado que de lo contrario se obtendrá una forma canónica de Jordan con valores complejos sobre la diagonal. Por ejemplo (el segundo vector propio es la conjugada del primero):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Los valores y vectores propios son:

$$\lambda = \{-1 + i, -1 - i\}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 - i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación con valores complejos es:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} -3 - i & -3 + i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5i & 0.5 + 1.5i \\ -0.5i & 0.5 - 1.5i \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A}^* en la forma canónica diagonal con valores complejos toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{bmatrix}$$

Si se toma la parte real y la parte imaginaria del vector propio (con cualquier signo) se obtiene:

$$\mathbf{T} = [\text{Re}\{\mathbf{v}_1\} \quad \text{Im}\{\mathbf{v}_1\}]^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En la sección 4.10.5 se presentan otras dos formas canónicas, con otro tipo de aplicaciones: forma canónica controlable y forma canónica observable. El diseño a partir de cualquiera de las formas canónicas implica la implementación o simulación con el sistema original y la aplicación de la

ecuación (1.101) cuando se realimente el estado, tal y como se muestra en la Fig. 4.17.

Ver los [ejercicios resueltos](#) [4] 1.23 y 1.24, y los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.24 en la web del libro.

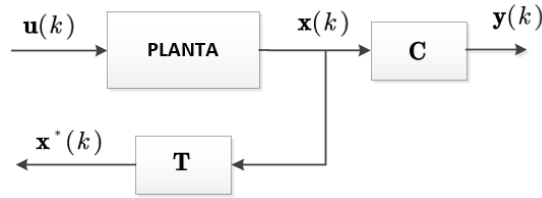


Fig. 1.24 Implementación de un controlador con una forma canónica

1.8.8 Polos y ceros de sistemas MIMO a partir de la ecuación de estado

En la sección 1.4.2 se presenta el concepto de polos y ceros para sistemas representados por una matriz de funciones de transferencia y se muestra las dificultades en el caso MIMO, sin profundizar en los detalles matemáticos. Allí se explicó que cuando se tiene una matriz de funciones de transferencia los polos y ceros no son generalmente aquellos de cada una de las funciones de transferencia y es necesario realizar algunos cálculos adicionales. En esta sección se amplían dichos conceptos para sistemas multivariables (MIMO), con base en lo expuesto en [14] [19], incluyendo una interpretación de estos, pero realizando los cálculos con MATLAB (en la referencia se encuentra la solución analítica a los ejemplos propuestos). Se muestra ahora el cálculo de los polos y ceros a partir del modelo en el espacio de estado. Como ya se ha expresado, los polos determinan la estabilidad del sistema lineal y corresponden a los valores propios (sección 1.8.3) de la matriz \mathbf{A} . Ahora la atención se centra en el cálculo de los ceros de un sistema MIMO. El cálculo de dichos valores de bloqueo para una representación en el espacio de estado parte de la siguiente realización mínima y su transformada de Laplace (con condiciones iniciales iguales a cero):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad \begin{cases} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) - \mathbf{BU}(s) = 0 \\ \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) = \mathbf{Y}(s) \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Y}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Entonces, un cero es un valor $s = z_i$ en el cual la matriz $\mathbf{P}(s)$ disminuye su rango, por lo cual para alguna entrada no nula de la forma $\mathbf{p}_z e^{z_i t} u_s(t)$ y ciertas condiciones iniciales la salida no contendrá el término $e^{z_i t}$, donde \mathbf{p}_z es cierto vector. Los ceros se calculan resolviendo el siguiente problema de valores propios generalizados:

$$\begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.106)$$

$$\left(s \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{bmatrix} = 0$$

Se observa que mientras los polos dependen de la matriz \mathbf{A} , los ceros dependen de las matrices $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$. Los **ceros de transmisión** corresponden a una realización mínima (después de la cancelación de polos y ceros, si la hay). Los **ceros invariantes** son los ceros de una realización no mínima. Si no hay cancelación de polos y ceros (el sistema es controlable y observable), los ceros invariantes y de transmisión son equivalentes. Los polos y ceros en sistemas multivariables tienen además una dirección dada por los respectivos vectores propios de (1.106). Un modelo no tiene ceros si $\mathbf{C} = \mathbf{I}, \mathbf{D} = 0$, es decir, cuando las salidas contienen información directa de los estados. Este hecho es importante en el diseño de sistemas de control por realimentación del estado (sección 4.9), donde no hay preocupación por la ubicación de los ceros. *Los ceros pueden aparecer cuando el número de entradas o salidas es diferente del número de estados o cuando $\mathbf{D} \neq 0$.* Sea la siguiente matriz de funciones de transferencia:

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix}$$

$$\text{Polos} = \{-1, 1, -2, -2\}, \text{Ceros invariantes} = \{-1, 1, 1\}$$

La respectiva realización mínima de la ecuación de estado calculada con MATLAB es (la función `tzzero` da realmente los ceros invariantes):

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

```
G = tf ( {[1 1 -2] 0 [1 -2 1]; -[1 3 2] [1 0 -1] [1 0 -1]}, [1 2 -1 -2]); S = ss(G); Smin = ss(G, 'min');
polos1 = pole(S); ceros1 = tzero(S); polos2 = pole(Smin); ceros2 = tzero(Smin);
```

```
polos1 =
    1.0000
   -1.0000
   -2.0000
    1.0000
   -1.0000
   -2.0000

ceros1 =
   -1.0000 + 0.0000i
    1.0000 + 0.0000i
    1.0000 - 0.0000i

polos2 =
   -1.0000
    1.0000
   -2.0000
   -2.0000
    1.0000
    1.0000

ceros2 =
    1.0000
```

Los polos de la realización mínima son $\{-2, -2, -1, 1\}$ y el cero de transmisión es $\{1\}$, mientras que los polos y ceros invariantes son $\{-2, -2, -1, -1, 1, 1\}$ y $\{-1, 1, 1\}$, con lo cual se observa una cancelación de dos polos y dos ceros. Aunque no se calculan los vectores de dirección, deben ser los adecuados dada la cancelación.

1.9 Relación entre representaciones de sistemas dinámicos

Cada una de las tres representaciones vistas anteriormente tiene sus ventajas y por eso es importante conocer las relaciones entre ellas, las cuales se muestran en la Fig. 1.25 y se explican a continuación.

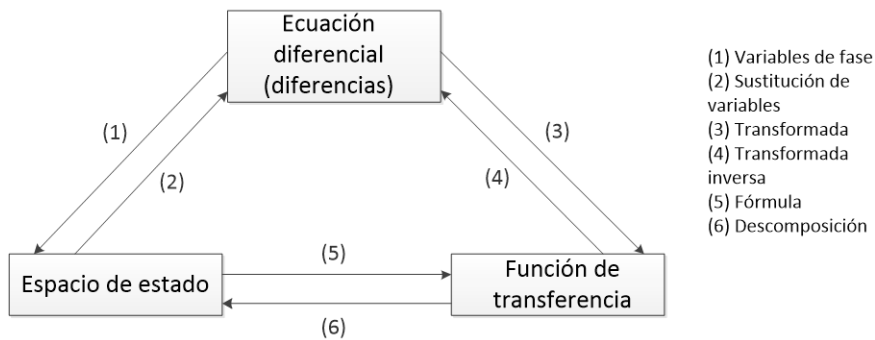


Fig. 1.25 Relación entre los métodos de modelación matemática (algunos aplican solo a modelos lineales)

Relaciones:

- (1) Transformación de una ecuación diferencial o en diferencias al espacio de estado. En este caso se utiliza el método de las variables de fase expuesto en la sección 1.8.2. El método es aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales.

- (2) Transformación del espacio de estado a una ecuación diferencial. Este caso es de poco interés, pero el método general consiste en derivar las ecuaciones de estado y reemplazarlas unas en otras hasta obtener una sola ecuación diferencial del mismo orden de la ecuación de estado. El método más simple para sistemas lineales consiste en pasar de la ecuación de estado a la función de transferencia y de allí a la ecuación diferencial. El caso no lineal es más complejo.
- (3) Transformación de una ecuación diferencial o en diferencias a una función de transferencia. En este caso se aplica la transformada de Laplace o z y se asumen condiciones iniciales iguales a cero (lo cual se logra si se trabaja alrededor de un punto de equilibrio, tal y como se explica en la sección 3.4). El método se explica en la sección 1.4.1.
- (4) Transformación de una función de transferencia a una ecuación diferencial o en diferencias. Aquí se aplica la transformada inversa de Laplace o z para llegar a una ecuación diferencial o en diferencias con condiciones iniciales iguales a cero, lo que equivale a un punto de equilibrio (solo $y(0)$ puede ser diferente de cero). El método se explica en la sección 1.4.1. Por ejemplo:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b}, \quad (s^2 + as + b)Y(s) = cU(s)$$

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = cu(t), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$$

- (5) Transformación del espacio de estado a una matriz de funciones de transferencia. En este caso se obtiene una fórmula explícita aplicando la transformada de la ecuación de estado, con un cambio de variables que garantice condiciones iniciales iguales a cero, y se despeja la transformada de la salida:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad \begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases}$$

Despejando $\mathbf{X}(s)$ y reemplazando en $\mathbf{Y}(s)$:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

De esta manera, la matriz de funciones de transferencia a partir de la ecuación de estado es:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.107)$$

Para el caso discreto:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D} \quad (1.108)$$

Ejemplo para un sistema **MISO** (*Multiple Input Single Output*):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad y = [1 \quad 2]\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{12s + 59}{(s + 2)(s + 4)} & \frac{7s + 34}{(s + 2)(s + 4)} \end{bmatrix}$$

Cálculo con MATLAB:

```
S = ss( [-5 -1; 3 -1], [2 1; 5 3], [1 2], [0 0]); G = tf(S);
```

- (6) Transformación de una función de transferencia o matriz de funciones de transferencia al espacio de estado. A esta transformación se le denomina **descomposición de la función de transferencia**. El siguiente ejemplo muestra dicha transformación con MATLAB para un sistema MIMO (*Multiple Input Multiple Output*):

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{12s + 59}{(s + 2)(s + 4)} & \frac{7s + 34}{(s + 2)(s + 4)} \end{bmatrix}$$

```
G = tf([12 59],[7 34]),[1 6 8]); S = ss(G);
```

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3.688 & 2.125 \\ 3 & 1.75 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad y = [0 \quad 4]\mathbf{x}$$

Esta ecuación de estado es similar a la del ejemplo anterior, lo cual se puede observar por simulación o por el cálculo de la matriz de transformación que relaciona los dos modelos. En el primer caso el código es:

```
S1 = ss( [-5 -1; 3 -1], [2 1; 5 3], [1 2],0); G = tf([12 59],[7 34]),[1 6 8]); S2 = ss(G); step(S1,S2)
```

Nota: todos los modelos de MATLAB (función de transferencia y ecuación de estado) asumen que la unidad de tiempo es el segundo. Sin

1. Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos

embargo, si se quieren cambiar las unidades se puede utilizar el comando `chgTimeUnit` o cambiar la propiedad de tiempo con `G.TimeUnit`.
Ver los [ejercicios propuestos](#) [5] 1.23 en la web del libro.

Índice

- Actuador, 258
- Adecuación de las señales, 257
- Adimensionalización, 140
- Alcanzabilidad (reachability), 296
- Algoritmo de control digital, 259
- Algoritmo recursivo de la variable instrumental (RIV), 366
- Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (RLS), 366
- Aliasing, 43
- Alinealidad, 177
- Amplificación, 237
- Análisis de incertidumbre, 143
- Análisis de sensibilidad, 143
- Análisis residual, 377
- Ancho de banda, 43, 236
- ANOVA-HDMR, 154
- Antisaturación, 280
- Antiwindup, 280
- Apagado del algoritmo, 366
- Aproximación de Padé, 29
- ARARMAX, 333
- ARARX, 333
- Área de los sistemas de control, 120
- ARMA, 324
- ARMAX, 329
- armax3422, 330
- Arreglo de Jury, 206
- Arreglo de Routh-Hurwitz, 199
- ARX, 328
- arx213, 329
- Atenuación, 237
- Atenuador, 231
- Atractor extraño, 182
- Atractor predecible, 182
- Bifurcación, 122, 183
- Bifurcación tridente (pitchfork bifurcation), 184
- BJ, 331
- bj21345, 332
- Bloque, 122
- Bosquejar, xix
- Box-Jenkins, 331
- Bumpless transfer, 281
- Búsqueda exhaustiva, 388
- CACSD, 135
- Caja gris, 318
- Caja negra, 318
- Camino, 125
- Camino directo, 125
- Canónico, 73
- Caos, 182
- Causalidad, 27
- Centro (punto de equilibrio), 174
- Ceros, 31
- Ceros de transmisión, 36, 98
- Ceros finitos, 32
- Ceros infinitos, 32
- Ceros invariantes, 36, 98
- Cibernética, xiii
- Ciclo límite, 179
- Cifras significativas, 146
- Círculo unitario, 30, 56
- Coefficiente de determinación, 376
- Coefficiente del filtro, 270
- Colinealidad, 347
- Competencia de aprendizaje, xvi
- Comportamiento, xix
- Comunicación, xiii
- Condición de regularidad del muestreo, 301
- Condición inicial, 11
- Condición necesaria, 196
- Condición no patológica del muestreo, 301
- Condición suficiente, 14
- Condiciones iniciales, 15
- Conjetura, 120
- Conjunto fundamental de soluciones, 18
- Conocimiento previo de la planta y sus perturbaciones, 316
- Constante de aceleración, 261
- Constante de error proporcional, 268
- Constante de posición, 261
- Constante de relajación, 270
- Constante de tiempo, 216
- Constante de tiempo del filtro, 270
- Constante de tiempo

derivativo, 269
 Constante de tiempo
 integral, 269
 Constante de velocidad,
 261
 Continua, 196
 Control, 118
 Control autosintonizado,
 363
 Control con
 prealimentación, 255
 Control de adelanto-
 serie, 254
 Control de oscilaciones
 muertas, 291
 Control de regulación,
 119
 Control de tiempo
 mínimo, 291
 Control derivativo, 269
 Control digital, 257
 Control en lazo abierto,
 119
 Control en lazo cerrado,
 119
 Control en paralelo, 254
 Control en serie, 254
 Control integral, 269
 Control lógico, 120
 Control P, 268
 Control PID, 267
 Control por
 realimentación del
 estado, 254
 Controlabilidad, 295
 Controlable, 295
 Controlable de estado
 completo, 295
 Controlable en la salida,
 298
 Controlador, 119
 Controlador estático,
 282
 Controlador PID, 267
 Convertidor análogo-
 digital (ADC), 45
 Convertidor de señal
 digital-análogo (DAC),
 257
 Convertidor digital-
 análogo (DAC), 45
 Convolución, 24
 Coprimo, 263
 Correlación, 339
 Crank Three Times
 (tres vueltas a la
 manivela), 147
 Criterio BIBO (*Bounded
 Input Bounded Output*),
 192
 Criterio de
 optimización, 344
 Críticamente
 amortiguado, 218
 Cuantificación, 45
 Curse of dimensionality,
 154
 Curva de linealidad, 177
 Datos informativos, 368
 Deadbeat control, 291
 Década, 229
 Decibelio, 228
 Derivable, 196
 Descomposición de la
 función de
 transferencia, 101, 130
 Descripción, xviii
 Descripción en
 fracciones matriciales,
 334
 Determinístico, xiv
 Diagrama de
 bifurcación, 184
 Diagrama de bloques,
 122
 Diagrama de Bode o
 logarítmico, 228
 Diagrama de dispersión
 (scatter plot), 150
 Diagrama estado, 127
 Diferencia finita hacia
 delante, 40
 Diferencia finitas hacia
 atrás, 41
 Dinámicas no
 modeladas, 320
 Dinámico, 2
 Discretización, 42
 Diseño, 248
 Diseño directo, 247
 Diseño discreto directo,
 248
 Diseño discreto
 indirecto, 248
 Diseño indirecto, 247
 Diseño mecatrónico, 249
 Diseño por análisis, 249
 Diseño por síntesis, 249
 Distribución t de
 Student, 385
 Doblado del espectro
 (folding), 43
 Documentación del
 modelo, 320
 Dominio o región de
 atracción, 192
 Ecuación característica,
 17
 Ecuación con
 coeficientes
 constantes, 11
 Ecuación con
 coeficientes variables,
 12
 Ecuación de estado, 70
 Ecuación de estado en
 variables de fase, 75
 Ecuación de Lyapunov
 continua, 197
 Ecuación de Lyapunov
 discreta, 197
 Ecuación de salida, 70

Ecuación de van der Pol, 179
 Ecuación diferencial, 6
 Ecuación diferencial autónoma, 6
 Ecuación diferencial ordinaria, 6
 Ecuación diofántica (o diofantina), 265
 Ecuación en diferencias, 40
 Ecuación homogénea, 15
 Ecuación no homogénea, 15
 Ecuaciones con variables separables, 8
 Ecuaciones diferenciales rígidas, 139
 Ecuaciones en el espacio de estado, 70
 Efecto mariposa, 182
 Empirical Transfer Function Estimate, ETFE, 341
 Enfoque abajo-arriba (bottom-up), 116
 Enfoque adentro-afuera-adentro (inside-out-outside-in), 116
 Enfoque arriba-abajo (top-down), 116
 Enfoque de identificación conjunta de entrada-salida, 384
 Enfoque de sistemas, xiii, 116
 Enfoque directo de identificación en lazo cerrado, 383
 Enfoque indirecto de identificación en lazo cerrado, 383
 Enfoque polinomial, 263
 Enmascaramiento de señales, 43
 Entrada, 6
 Error absoluto, 145
 Error de cuantificación, 45
 Error de predicción, 328, 377
 Error en estado estacionario, 223
 Error estándar, 385
 Error relativo, 145
 Errores aleatorios, 145
 Errores por descuido, 145
 Errores sistemáticos, 145
 Escalamiento, normalización, 140
 Escenario, 103
 Esfuerzo de control, 256, 288
 Espacio de búsqueda, 344
 Espacio de estado, 68
 Espacio de fase, 68, 168
 Espectro de potencia, 238
 Estabilidad, 190
 Estabilidad absoluta, 193
 Estabilidad asintótica, 191
 Estabilidad asintótica global, 192
 Estabilidad en el sentido de Lyapunov, 191
 Estabilidad global, 179
 Estabilidad marginal, 193
 Estabilidad relativa, 193, 255
 Estado, 68
 Estimación, 308
 Estimación consistente, 318
 Estimación de parámetros, 314
 Estimación del estado, 390
 Estimación eficiente, 319
 Estimación insesgada, 318
 Estimador lineal cuadrático, 414, *Véase* Filtro de Kalman
 Estocástico, xiv
 Estructura del modelo y de las perturbaciones, 317
 Estructuración de problemas, 115
 Etapas de la modelación y la simulación, 112
 Evento, 110
 Experimento informativo, 368
 Factor, 142
 Factor de cresta, 369
 Factor de olvido, 366
 Factor integrante, 12
 Fase, 220
 Fase de un número complejo, 227
 Fijación de los factores, 143
 Filtrado (filtering), 399
 Filtro antialiasing, 44
 Filtro de Bessel, 241
 Filtro de blancura, 340, 343
 Filtro de Butterworth, 241
 Filtro de Kalman, 397
 Filtro de Kalman conjunto (joint

Kalman filter, JKF), 411
 Filtro de Kalman dual (DKF), 412
 Filtro de señales, 67
 Filtro extendido de Kalman (EKF), 406
 Filtro IIR, 67
 Filtro ITAE, 241
 Filtro pasabajas, 240
 Finite Impulse Response, 67
 Foco (o espiral) estable, 173
 Foco (o espiral) inestable, 174
 Forma canónica controlable (FCC), 306
 Forma canónica de Jordan (FCJ), 94
 Forma canónica diagonal (FCD), 93
 Forma canónica observable (FCO), 306
 Forma cuadrática, 195
 Forma de innovaciones, 334
 Forma de Joseph, 404
 Forma regresiva, 328
 Forma regresiva del modelo, 345
 Fórmula de Mason, 126
 Fracción coprima, 36
 Fracción estrictamente propia, 27
 Fracción impropia, 27, 55
 Fracción propia, 27
 Fractal, 182
 Frecuencia angular amortiguada, 218, 220
 Frecuencia de corte, 240
 Frecuencia de cruce de fase, 243
 Frecuencia de cruce de ganancia, 243
 Frecuencia de muestreo, 42
 Frecuencia de Nyquist, 44
 Frecuencia de resonancia, 236
 Frecuencia natural, 225
 Función continua, 196
 Función de coste, 344
 Función de densidad de probabilidad (PDF), 150
 Función de distribución (acumulada) de probabilidad, 150
 Función de energía generalizada, 194
 Función de Lyapunov, 196
 Función de pérdida, 344
 Función de ponderación, 67
 Función de transferencia, 26
 Función de transferencia discreta, 55
 Función de utilidad, 344
 Función definida positiva, 194, 196
 Función delta de Dirac, 21
 Función delta de Kronecker, 51
 Función derivable, 196
 Función escalón unitario o de Heaviside, 20
 Función objetivo, 344
 Función semidefinida positiva, 195
 Ganancia de Kalman, 397
 Ganancia de un camino, 126
 Ganancia de un camino directo, 126
 Ganancia de un lazo, 126
 Ganancia de una rama, 126
 Ganancia del sistema, 216, 218
 Gradiente, 346, 358
 Grado, 7
 Grado de libertad, 1
 Grado de McMillan, 36, 305
 Gráfico de flujo de señal, 125
 Hessiano, 359
 Heurística, 273
 Hipótesis, 106
 Histograma, 150
 Identificabilidad (global), 320
 Identificabilidad de los parámetros, 320
 Identificabilidad del sistema, 320
 Identificación de sistemas, 314
 Identificación en lazo cerrado, 382
 IMRAD, xviii
 Incertidumbre, 142
 Independencia lineal, 16
 Índice de desempeño, 344
 Índice de sensibilidad de primer orden, 157
 Índice de sensibilidad total, 158
 Índices de sensibilidad, 152
 Información, xiii
 Ingeniería de sistemas,

120
 Innovación. *Véase* Error de predicción
 Integración condicional, 280
 Integrador, 73, 127, 128
 Integral de Fourier, 238
 Interpretación, xviii
 Intervalo de confianza, 145, 384
 Intervalo o región de linealidad, 185
 Isoclina, 169
 Jacobiano, 187
 Lag window, 343
 Lazo, 125
 Lazo cerrado, 119
 Lazos disjuntos, 125
 Lema de inversión de matrices, 364, 365
 Linealidad (propiedad de la transformada de Laplace), 24
 Linealización, 125, 185
 Linealmente independientes, 16
 LTI – Lineal invariable en el tiempo (Linear Time Invariant), 7
 LTV – Lineal variable en el tiempo (Linear Time Variant), 7
 Lugar de las raíces (*root locus*), 210
 Lugar de las raíces complementario, 211
 Magnitud de un número complejo, 227
 Magnitud física, xix
 Maldición de la dimensionalidad, 154, 159
 Manchado o goteo espectral, 343
 Margen de fase, 243
 Margen de ganancia, 243
 MATLAB
 acker, 288
 atan2, 228
 balred, 40
 besself, 242
 bode, 229
 butter, 242
 c2d, 63
 chgTimeUnit, 102
 datatip, 298
 diff, 9
 dsolve, 9, 13
 fft, 239
 fimplicit, 175
 for, 10, 62, 185
 fplot, 14
 grid, 228
 histogram, 150
 iddata, 370
 idinput, 370, 372, 373
 itaef, 242
 jury, 208
 length, 62, 185, 386
 lhsdesign, 150
 linmod, 190
 linspace, 239
 logspace, 228
 makedist, 149
 margin, 247
 nextpow2, 239
 ode45, 183
 odeFunction, 183
 pexcit, 370
 pwelch, 182
 randn, 325
 random, 149
 rlocus, 211
 rng, 149
 semilogx, 228
 sgtitle, 228
 signalAnalyzer, 239, 240
 solve, 175
 sort, 185
 stepinfo, 224
 subplot, 149
 syms, 9, 175, 183, 204
 text, 185
 vpasolve, 185
 wgn, 325
 zeros, 62, 185, 210
 zpk, 39
 Matriz de controlabilidad, 295
 Matriz de covarianzas del error del estado, 400
 Matriz de covarianzas del ruido de medición, 400
 Matriz de covarianzas del ruido del proceso, 400
 Matriz de funciones de transferencia, 28
 Matriz de Hurwitz, 197
 Matriz de observabilidad, 299, 395
 Matriz de Sylvester, 266
 Matriz de transición del estado, 80, 83
 Matriz definida positiva, 195
 Matriz del observador, 394
 Matriz exponencial, 85
 Matriz fundamental, 80
 Matriz hessiana, 359
 Matriz jacobiana (jacobiano), 187
 Matriz o ganancia de Kalman, 401
 Measurement update, 405
 Mecatrónica, 250

Memoria (característica de un sistema dinámico), 2
 Metaheurística, 388
 Método de Ackerman, 286
 Método de coeficientes indeterminados, 19, 80
 Método de Chien-Hrones-Reswick, 275
 Método de estimación de parámetros, 318
 Método de Euler, 131
 Método de Jury, 205
 Método de la curva de reacción, 273
 Método de la variable instrumental, 351
 Método de la variable instrumental de cuatro pasos, 353
 Método de la variable instrumental de solo entradas, 352
 Método de la variable instrumental mejorado, 352
 Método de las isoclinas, 169
 Método de mínimos cuadrados, 344
 Método de Montecarlo, 148
 Método de Routh-Hurwitz, 198
 Método de sensibilidad, 273
 Método de sensibilidad de fuerza bruta, 154
 Método de sensibilidad de Jansen, 154
 Método de sensibilidad de Saltelli, 154
 Método de sensibilidad de Sobol, 154
 Método de un factor a la vez, 153
 Método de variación de las constantes, 19, 81
 Método de Welch, 239
 Método de Ziegler-Nichols, 273
 Método del error de salida (output error method), 358
 Método del factor integrante, 12
 Método directo o segundo método de Lyapunov, 194
 Método espectral, 341
 Método indirecto o primer método de Lyapunov, 197
 Métodos de identificación en línea (on-line), 319
 Métodos de identificación fuera de línea (off-line), 319
 Métodos de Runge-Kutta, 131
 Métodos de sensibilidad basados en la varianza, 154
 Métodos de sensibilidad global, 153
 Métodos de sensibilidad local, 153
 Métodos no paramétricos, 336
 Métodos no paramétricos de identificación, 319
 Métodos paramétricos de identificación, 319
 MIMO, Multiple Inputs Multiple Outputs, 28
 MISO (Multiple Input Single Output), 101
 MISO (Multiple Inputs Single Output), 28
 Modelación, 107
 Modelación matemática, 108
 Modelo, 107
 Modelo aditivo puro, 158
 Modelo analógico, 108
 Modelo caja gris, 308, 387
 Modelo caja negra, 308
 Modelo causal, 27
 Modelo computacional, 110
 Modelo cuantificado, 108
 Modelo de datos muestreados, 109
 Modelo de error de la ecuación. Véase ARX
 Modelo de referencia, 264
 Modelo de tiempo continuo, 108
 Modelo de tiempo discreto, 109
 Modelo digital, 109
 Modelo estructural, 110
 Modelo experimental (modelo caja negra), 108
 Modelo externo, 68
 Modelo funcional, 110
 Modelo híbrido, 109
 Modelo interno, 68
 Modelo matemático, 108
 Modelo mixto (modelo caja gris), 108
 Modelo no causal, 55

Modelo nominal, 115, 142
 Modelo teórico o fenomenológico (modelo caja blanca), 108
 Modelos exploratorios, 108
 Modos de un sistema, 368
 Mónico, 324
 MSE (mean squared error, error cuadrático medio), 356
 Muestreo, 42
 Muestreo de hipercubo latino, 148
 Muestreo irregular, 42
 Muestreo monofrecuencia, 42
 Muestreo multifrecuencia, 42
 Muestreo normal, 148
 Muestreo regular, 42
 Muestreo uniforme, 148
 Multiplicidad algebraica (ma), 79
 Multiplicidad geométrica (mg), 79
 Nilpotente, 296
 Nivel de confianza, 384
 Nivel de cuantificación, 45
 Nivel de significancia, 384
 No amortiguado, 218
 Nodo, 125
 Nodo de entrada o fuente, 125
 Nodo de salida o sumidero, 125
 Nodo estable, 172
 Nodo inestable, 173
 Norma euclidiana, 256
 Norma- ∞ , 256
 Normalización, 140
 Número de condición, 92
 Observabilidad, 295
 Observable, 299
 Observable de estado completo, 299
 Observador actual, 395
 Observador de estado, 393
 Observador de Luenberger, 396
 Observador de orden reducido, 396
 Observador de predicción, 394
 OE, 330
 oe154, 331
offset, 268
 One-factor-at-a-time, OAT, 153
 Operador, 322
 Operador de desplazamiento hacia atrás, 128, 321
 Operador de desplazamiento hacia delante, 321
 Operador de transferencia, 322
 Optimización, 256, 344
 Orden, 6, 68
 Orden de excitación persistente, 368
 Orden relativo, 52, 57
 Oscilaciones ocultas, 46
 Parámetro, xix
 Parámetro concentrado, 6
 Parámetro de bifurcación, 183
 Parámetros estimados de control, 387
 Paso del método numérico, 131
 Pensamiento matemático, xvi
 Período de muestreo, 42
 Período de repetición, 371
 Período del reloj, 371
 Periodograma, 239
 Perturbación, xiv
 Pico de resonancia, 235
 PID, 267
 PID ideal o estándar, 270
 PID ideal o estándar con derivada filtrada, 270
 Planificación experimental, 316
 Polinomio auxiliar, 199
 Polo dominante, 30
 Polos, 29
 Polos insignificantes, 30
 Polos y ceros estables, 33
 Porcentaje de ajuste, 376
 PRBS, 372
 Precisión estacionaria, 255
 Predicción, 113
 Predictor corrector, 393
 Predictor de Smith, 277
 Predictor óptimo, 357
 Predictor-corrector, 390, 399
 Preprocesamiento de datos, 373
 Principio, xiii
 Principio de dualidad, 395
 Principio de parsimonia, 375
 Principio de separación, 285

Principio de
 superposición, 177
 Priorización de los
 factores, 143
 Problema de valor
 inicial, 11
 Procesamiento de datos
 (señales), 373
 Proceso, xiv
 Proceso estocástico, 309
 Proceso estocástico
 estacionario, 324
 Procesos de la
 matemática, xvi
 Producto de Cauchy, 86
 Pronóstico, 114
 Propagación de errores,
 143
 Propagación del error,
 146
 Propiedades estadísticas
 del método de
 mínimos cuadrados,
 349
 Prototipado Evolutivo
 por Desarrollo
 Incremental, 248
 Prototipado rápido de
 software, 135
 Prototipo, 135
 Prueba de blancura
 (whiteness test), 379
 Pseudocódigo, xv, 259
 Pseudofrecuencia, 221
 Pseudoinversa, 348
 Punto crítico, 170
 Punto de equilibrio, 170
 Punto de equilibrio
 asintóticamente
 estable, 191
 Punto de equilibrio
 asintóticamente
 estable global, 196
 Punto de equilibrio
 estable, 172, 191
 Punto de equilibrio
 hiperbólico, 175
 Punto de equilibrio
 inestable, 172
 Punto de operación, 186
 Punto de operación de
 estado estacionario,
 170
 Punto de ruptura, 212
 Punto de silla, 174
 Punto fijo, 170
 Raíces características, 17
 Rama, 122, 125
 Rango, 37
 Rango completo, 91
 Razón de
 amortiguamiento, 218
 Razón de caída, 223
 Razón de corte, 231, 236
 RBS, 371
 Realimentación, 253
 Realimentación
 (feedback), 119
 Realización mínima, 36,
 98
 Recolección de datos,
 317
 Reconstrucción, 59
 Recursividad, 46
 Rechazo de
 perturbaciones, 255
 Región de atracción,
 182, 192
 Regulabilidad del
 proceso, 274
 Requerimientos de
 diseño, 255
 Residuos, 328, 377
 Resonancia, 225
 Respuesta al impulso, 66
 Respuesta estacionaria,
 214
 Respuesta frecuencial,
 225
 Respuesta frecuencial
 experimental, 341
 Respuesta transitoria,
 214
 Resultado de
 aprendizaje, xvi
 Retardo, 28, 71
 Retardo discreto, 127
 Retardo intrínseco, 58
 Retardo puro, 58, 71,
 216, 218
 Retardo puro (d), 56
 Retardo total, 58
 Retenedor de orden cero
 (ZOH), 59
 Retrato de fase, 169
 Rizado intermuestreo,
 46
 RLS, 366
 Robustez, 143, 255
 Ruido, xiv
 Ruido blanco, 324
 Ruido blanco gaussiano,
 325
 Ruido blanco uniforme,
 325
 Ruido coloreado, 325
 Ruido de cuantificación,
 45
 Runge-Kutta, 131
 Salida, 6
 Saturación (windup),
 267
 Saturación del
 integrador (windup),
 279
 Secuencia binaria
 aleatoria (RBS), 371
 Secuencia binaria
 pseudoaleatoria
 (PRBS), 372
 Secuencia de
 ponderación, 66

Seguimiento de la señal de control, 280
 Semiplano izquierdo, 30
 Sensibilidad, 143
 Sensor, 258
 Señal, xiv
 Señal analógica, 109
 Señal continua, 108
 Señal cuantificada, 108, 109
 Señal cuasiestacionaria, 325
 Señal de datos
 muestreados, 59, 109
 Señal de tiempo
 continuo, 109
 Señal de tiempo
 discreto, 109
 Señal digital, 109
 Señal discreta, 109
 Señal persistentemente
 excitada (pe), 368
 Serie de Fourier, 237
 Serie de Taylor, 187
 Serie de tiempo, 323
 Sesgo, 318
 Setpoint. *Véase* Variable de referencia
 SIMO (Single Input Multiple Outputs), 28
 Simulación, 110
 Simulación en tiempo de máquina, 111
 Simulación en tiempo real, 111
 Simulación hardware-in-the-loop (HIL), 111
 Simulación híbrida, 103, 248
 Simulación human-in-the-loop (HMIL), 112
 Simulación software-in-the-loop (SIL), 111
 Sinergia, 117
 Síntesis, 249
 Sintonización de un controlador, 273
 SISO, Single Input Single Output, 26, 55
 Sistema, xiii
 Sistema autónomo, 6
 Sistema
 condicionalmente estable, 244
 Sistema de control, 118
 Sistema de fase mínima, 33, 230
 Sistema detectable, 300
 Sistema dinámico, 1
 Sistema estabilizable, 305
 Sistema estático, 2
 Sistema híbrido, 123
 Sistema lineal invariable en el tiempo (LTI), 7
 Sistema lineal variable en el tiempo (LTI), 7
 Sistema subactuado, 283
 Sobrearmortiguado, 218
 Sobreimpulso máximo porcentual, 223
 Sobreparametrización, 320
 Solapamiento del espectro, 43
 Solución analítica, xvii
 Solución
 complementaria, 15
 Solución de problemas, xviii
 Solución general, 8, 15
 Solución numérica, xvii, 131
 Solución particular, 11
 Solución simbólica, 9
 Solución singular, 10
 Soluciones factibles, 344
 Spectral leakage, 343
 Subarmortiguado, 218
 Subparametrización, 320
 Sumador, 122
 Superficie de Lyapunov o superficie de nivel, 196
 Supervisión, 257
 Sustituciones
 progresivas, 90
 Técnicas antisaturación (antiwindup), 280
 Teorema de Barbashin-Krasovski, 196
 Teorema de Cayley-Hamilton, 287
 Teorema de
 convolución, 66
 Teorema de existencia y unicidad, 16
 Teorema de existencia y unicidad de Picard, 14
 Teorema de Fourier, 237
 Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, 43
 Teorema del método directo de Lyapunov, 195
 Teoría de errores y aproximación, 145
 Término independiente, 6, 15
 Tiempo de crecimiento, 222
 Tiempo de escape, 178
 Tiempo de
 establecimiento, 223
 Tiempo de pico, 223
 Time update, 404
 Tipo de sistema, 260
 Transferencia suave (bumpless transfer), 281

Transformación bilineal,	68	estado, 72
200	Validación, 113, 376	Variables incrementales
Transformación de	Validación basada en la	(linealización), 187
similitud, 91	predicción, 377	Vector de entrada, 70
Transformación lineal,	Validación basada en la	Vector de estado, 70
91	simulación, 377	Vector de índices de
Transformada de	Validación basada en un	controlabilidad, 303
Fourier, 237	horizonte de	Vector de índices
Transformada de	predicción, 377	observabilidad, 303
Fourier discreta, 342	Valores de bifurcación,	Vector de instrumentos,
Transformada de	184	351
Laplace, 20	Valores y vectores	Vector de parámetros,
Transformada inversa de	propios, 77	328
Laplace, 24	Variable, 6	Vector de regresión, 328,
Transformada z, 50	Variable controlada, 119	345
Transformada z inversa,	Variable de control, 118	Vector de residuos, 345
55	Variable de error:, 118	Vectores propios
Transformada z	Variable de	generalizados, 79
modificada, 52	perturbación, 119	Ventana de Hann, 343
Traslación compleja	Variable de referencia	Ventana de retraso, 343
(propiedad de la	(setpoint), 118	Ventana rectangular, 343
transformada de	Variable dependiente, 6	Verificación, 113
Laplace), 24	Variable independiente,	Windup, 279
Traslación real	6	Wronskiano, 18, 80
(propiedad de la	Variables canónicas, 73	Zero-Order Holder,
transformada de	Variables de estado, 68	ZOH, 59
Laplace), 24	Variables de fase, 72, 75	
Trayectoria de estado,	Variables físicas de	



Queremos que formes parte de la Editorial EAFIT.
Únete a nuestra comunidad de lectores y
recibe información especial sobre novedades,
lanzamientos y actividades culturales.



Este libro se terminó de imprimir en Transparencia Dúo
para la Editorial EAFIT
Medellín, noviembre de 2024