A Sara y Liza
mis adoradas Pandoras

Índice general

Prefacio ix

0. Consideraciones sobre la divergencia entre lógicas no clásicas y lógica clásica **1**

0.1. Primera consideración 1

0.2. Segunda consideración 4

0.3. Ejercicios 8

0.4. Referencias bibliográficas 9

1. Lógica trivaluada de Lukasiewicz **11**

1.1. Aspectos generales 11

1.2. Primera aproximación al sistema de lógica L_3 12

1.3. Definiciones generales 16

1.4. El sistema trivaluado (L_3) de Lukasiewicz 19

1.5. Ejercicios 22

1.6. Referencias bibliográficas 23

2. La L_3 validez **25**

2.1. De los principios y leyes lógicas en L_3 25

2.1.1. Del principio de identidad 25

2.1.2. El Pseudo-Scoto 26
2.1.3. La doble negación 28
2.1.4. No-contradicción y tercio excluso 29
2.1.5. Algunas observaciones notables 30
2.2. Extensión de L_3 31
2.3. El operador de indeterminación I 35
2.4. El teorema de deducción en L_3 35
2.4.1. El condicional de Monteiro: $\twoheadrightarrow$ 37
2.4.2. Teorema de deducción (versión semántica) 38
2.5. Traslación semántica de L_0 en L_3 40
2.6. Ejercicios 42
2.7. Referencias bibliográficas 44

3. Axiomáticas para la lógica trivaluada de Lukasiewicz 45

3.1. Introducción 45
3.2. Sistema deductivo 46
3.2.1. Reglas de inferencia 46
3.2.2. Los axiomas 47
3.3. Axiomática de Wajsberg para L_3 48
3.3.1. Regla de substitución 51
3.4. El sistema axiomático deductivo $L_3(\Delta_1)$ 52
3.4.1. El sistema deductivo $L_3(A_1)$ 53
3.4.2. Axiomas $L_3(\Delta_1)$ 53
3.4.3. Reglas de inferencia de $L_3(\Delta_1)$ 54
3.5. Completitud y consistencia 55
3.5.1. Inconsistencia 56
3.6. Ejercicios 72

4. La lógica trivaluada de Bochvar **75**

4.1. Introducción 75

4.2. El sistema B_3 de Bochvar 77

4.2.1. Definiciones formales en B_3 78

4.2.2. El problema de la tautologicidad en B_3 79

4.3. El sistema B_3^E 80

4.3.1. Conectivos externos de B_3^E 81

4.3.2. La noción de B_3^E-tautología 82

4.3.3. El operador de aserción débil $W()$ 82

4.3.4. La contradicción en B_3 84

4.4. Ejercicios 84

4.5. Referencias bibliográficas 85

5. La lógica trivaluada de Klenne: K_3 **87**

5.1. Introducción 87

5.1.1. El tercer valor alético de K_3 87

5.2. La matriz de K_3 89

5.2.1. Las conectivas fuertes de K_3 89

5.2.2. Las conectivas débiles de K_3 90

5.3. K_3-valuación y K_3-validez 90

5.4. Lógica trivaluada de Smiley: S_3 94

5.5. Ejercicios 95

5.6. Referencias bibliográficas 95

6. Las lógicas L_n y $L_{\aleph}$ **97**

6.1. Introducción 97

6.1.1. Universo semántico: dominio de valores de verdad . . 97

6.2. L-valuación . . . 98
6.3. Definiciones formales . . . 99
6.4. La serie de lógicas $L_2, L_3, L_4, L_5, \ldots L_n$ . . . 99
6.5. Lógicas infinito-valuadas . . . 100
6.5.1. La lógica $L_{\aleph_0}$ . . . 100
6.5.2. La lógica $L_{\aleph}$ . . . 100
6.6. Una axiomática para $L_{\aleph}$ . . . 104
6.6.1. Esquemas axiomáticos . . . 104
6.6.2. Reglas de inferencia . . . 104
6.6.3. Teorema de validez . . . 104
6.7. Ejercicios . . . 106
6.8. Referencias bibliográficas . . . 106

7. El operador negación en lógica multivaluada 107
7.1. Introducción . . . 107
7.2. Sobre las negaciones . . . 112
7.3. Ejercicios y referencias bibliográficas . . . 113

8. Algunos aspectos de lógica multivaluada de predicados 115
8.1. Introducción . . . 115
8.1.1. La sintaxis . . . 116
8.2. Teoría generalizada de cuantificadores . . . 116
8.3. La teoría de cuantificadores en lógica multivaluada . . . 118
8.3.1. La cuantificación en una lógica n-valuada . . . 118
8.3.2. El cuantificador múltiple o M-cuantificador . . . 120
8.3.3. cuantificadores generalizados . . . 121
8.3.4. Interrelación entre cuantificadores . . . 123

8.3.5. Ajuste al modo clásico 126
8.4. Ejercicios 127
8.5. Referencias bibliográficas 128

9. Lógica intuicionista 129
9.1. Introducción 129
9.2. La concepción intuicionista 130
9.3. La separabilidad 135
9.4. Lógica intuicionista de Heyting: el sistema de lógica H. . . . 136
9.4.1. El sistema de lógica H 137
9.4.2. Esquemas axiomáticos 137
9.4.3. Reglas de inferencia 138
9.4.4. Noción formal de demostración 138
9.4.5. Metateoremas y teoremas 139
9.4.6. Otras axiomáticas para la lógica intuicionista de enunciados 145
9.5. Semántica 146
9.5.1. Consecuencia semántica 152
9.6. Árboles de Kripke 153
9.7. Ejercicios 161
9.8. Referencias bibliográficas 163

10. Teorema de completitud para H 165
10.1. Introducción 165
10.2. Definiciones y lemas básicos 166
10.2.1. Definiciones básicas 166
10.2.2. Lemas básicos 167
10.3. Modelo canónico de H 176

10.4. La lógica intuicionista (H) y el teorema de completitud. . . 184
10.5. Decibilidad de H 187
10.6. Ejercicios 188
10.7. Referencias bibliográficas 188

11.Negación y lógicas minimales **189**

11.1. Introducción 189
11.2. Lógica minimal de Kolmogorov 192
11.3. Sobre la negación y lo negativo 193
11.3.1. La negación intuicionista minimal 195
11.3.2. Negación contraproposicional 195
11.3.3. Negación clásica 195
11.3.4. La negación intuicionista 196
11.3.5. Semi-negación 197
11.3.6. En suma 197
11.4. Un sistema de lógica minimal (L_m) 198
11.4.1. Axiomática $\Delta = \{A_1, A_2, A_3\}$ 198
11.4.2. Deducción en L_M 199
11.5. La constante $\perp$ 202
11.6. Lógica minimal intuicionista (J) de Johansson 204
11.6.1. El sistema de lógica proposicional J 205
11.6.2. Algunos teoremas de J 206
11.6.3. Algunos teoremas de H no deductible en J 209
11.7. Semántica 211
11.8. El teorema de completitud 213
11.9. Ejercicios 213
11.10Referencias bibliográficas 215

12. El sistema de lógica J_3 **217**

12.1. Introducción 217

12.2. El sistema J_3. Semántica 218

12.3. Matriz semántica de J_3 220

12.3.1. La negación paraconsistente $\neg$ de J_3 221

12.3.2. El operador '$\diamondsuit$' 222

12.3.3. El conectivo '$\wedge$' 223

12.4. Definiciones formales 223

12.4.1. El operador '$\square$' 223

12.4.2. El conectivo '$\vee$' 224

12.4.3. El conectivo '$\rightarrow$' 224

12.4.4. El conectivo '$\leftrightarrow$' 225

12.4.5. El operador '$\sim$' 225

12.4.6. El operador '©' (operador de consistencia) 226

12.5. J_3-valuación 227

12.5.1. J_3-tautología 228

12.5.2. Modus ponens (semántico) 229

12.6. El teorema de deducción (forma semántica) 230

12.7. Interdefinibilidad de los conectivos en J_3 231

12.8. J_3-validez 231

12.8.1. Primeras conclusiones importantes 234

12.8.2. Principio de (no) contradicción y tercer excluido 235

12.9. Relaciones entre J_3 y la lógica clásica 237

12.10Inconsistencia, contradicción y trivialización 239

12.11La traslación '$*$' 243

12.12Ejercicios 245

12.13Referencias bibliográficas 247

13. Axiomatización de J_3 249

13.1. Introducción 249

13.2. Sintaxis 250

13.3. Definiciones formales en J_3 250

13.4. Una axiomática para J_3 251

13.4.1. Los esquemas axiomáticos 251

13.4.2. Regla de inferencia Modus Ponens (MP) 252

13.4.3. Notaciones básicas 252

13.4.4. Algunos teoremas de J_3 253

13.5. Teorema de deducción (sintáctico) 255

13.6. Ejercicios 259

13.7. Referencias bibliográficas 261

14. Elementos de la metalógica. Teorema de completitud para J_3 263

14.1. Introducción: las negaciones de J_3 263

14.2. Consistencia - inconsistencia 264

14.3. Consistencia - inconsistencia en J_3 269

14.4. Teorema de completitud para J_3 275

14.5. Consistencia: de nuevo la cuestión de J_3 285

14.6. Últimas notas 286

14.7. Ejercicios 288

14.8. Referencias bibliográficas 289

Bibliografía 291

Prefacio

En el ámbito del pensamiento contemporáneo muchos de los grandes fundamentos de la razón se han visto cuestionados. La lógica clásica, el gran aparato deductivo de la razón, es uno de los pilares que aún hoy ofrecen cierta resistencia al empuje crítico de la misma razón, que, no obstante, ha logrado penetrar su propio núcleo lógico y abrirse paso para cuestionar, multiplicar y expandir lo lógico hasta lo que actualmente se nombra con el término de lógicas no clásicas, o también lógicas divergentes.

El presente texto se ubica en el marco de las problemáticas y resultados generados por algunas de las lógicas no clásicas, y tiene un propósito bastante modesto: presentar algunos sistemas de lógicas no clásicas así como algunas consideraciones de naturaleza epistemológica que contribuyen a la comprensión de los fundamentos y de las consecuencias que se desprenden de aquellos. He intentado que el texto pueda ser comprendido por quien posea unos conocimientos básicos de lógica clásica. Para las cuestiones filosóficas que el texto pone en consideración, se sugieren siempre, en los ejercicios, algunas lecturas que considero decisivas para los sujetos abordados en cada una de las lecciones que lo conforman.

Para efectos de la presente introducción es recomendable plantear algunas consideraciones preliminares sobre ciertos aspectos centrales de la relación existente entre la lógica clásica y los así llamados fundamentos de la razón moderna, asunto sobre el cual, por cierto, volveremos en la lección cero. Haremos estos breves comentarios, con la intención explícita de abrir de entrada el debate que, sobre los posibles fundamentos perdidos de la razón, sostienen los lógicos y filósofos de las actuales sociedades postmodernas. Sobre las concepciones y transgresiones epistemológicas realizadas por las lógicas no clásicas sólo haremos algunos apuntes mínimos, puesto que en el seno de este texto tenemos suficientes reflexiones y problemas que plantear.

Tal vez no se exagere si se afirma que la poderosa lógica clásica tiene apoyados sus intemporales cimientos en algunos postulados metafísicos, de algunos de los cuales, quizá, no hay modo de salvarse; pero hay que señalar que por encima de ellos sobresalen dos grandes postulados epistemológicos fundamentales, en el sentido grave de fundamento.

La lógica clásica se basa, pues, en dos postulados que se consideran fundamentales: el postulado de composicionalidad o de verifuncionalidad y el postulado de bivalencia. El postulado de verifuncionalidad consiste en asumir, sin más, que la verdad de un enunciado compuesto depende únicamente de los respectivos valores de verdad de sus componentes; es decir, se trata simplemente de una función alética independiente de todo contexto intencional y de toda idea de complejidad del significado de la proposición molecular. Más aún, la llamada lógica clásica de primer orden refuerza dicho postulado al asumir que todo concepto está completamente determinado por la clase de objetos que caen bajo la extensión de dicho concepto, es decir, todo concepto cae bajo el imperio del postulado de extensionalidad.

El otro postulado, el de bivalencia, consiste en asumir, sin más, la «creencia» de que existen exactamente dos y sólo dos posibles valores aléticos -1 y 0, que representan formalmente lo verdadero y lo falso respectivamente, -y que, además, cada enunciado posible tiene exactamente uno y sólo uno de estos dos valores de verdad.

Ahora, en conjunción con los postulados anteriores -tanto por la vía semántica como por la vía axiomática-, se imponen los principios lógicos; los mismos que le permiten a la lógica clásica aparecer y consolidarse históricamente, hasta hace poco tiempo, como la forma más rigurosa y legítima de tratar los principios del razonamiento y, por ende, el único aparato deductivo válido para garantizar el proceso de transmisión de la verdad. La razón se ve de este modo no sólo regida, como debe ser, sino que se encuentra limitada y determinada por una cierta voluntad lógica absoluta.

El estudio crítico de estos postulados y principios que venimos de presentar requiere tiempo y sobre todo espíritu de alteridad, esto es, se requiere un espíritu que sea capaz de ir renunciando paso a paso a muchas de nuestras certezas consagradas a lo largo de cientos de años de ejercicio de una razón apoyada en dichos postulados y principios lógicos. Por ello, una parte importante de este estudio crítico la abordaremos en cada una de las lecciones del presente texto, en especial en las lecciones cero, uno y dos. No obstante, en esta introducción destaquemos, por el momento, que una de las consecuencias más fuertes que resultan del hecho de asumir, sin restricciones, todos los principios del razonamiento que vertebran a la lógica clásica reside, no sólo, en que la razón se confina entre los límites de la bivalencia sino que se ve forzada a permanecer en las fronteras de la consistencia: el mundo, sea lo que él sea, debe obedecer al postulado lógico de consistencia. Es decir, la razón no puede traspasar las fronteras de lo no-contradictorio, de lo claro y distinto, de la completitud de la verdad. Las consecuencias de una posible trasgresión de dichas fronteras, es decir, los límites que la lógica clásica (o en parte, la intuicionista) le imponen a la razón, son funestas para la razón misma: es necesario pagar el costo de la trivialización. Esto significa que si un cierto sistema de conocimiento se topa con una contradicción y si la máquina de razonamiento lógico subyacente a dicha teoría no soporta la contradicción, entonces, inevitablemente el sistema teorético en cuestión se trivializa; vale decir el sistema paga el precio de la indistinción, la pérdida de información, la inexistencia; en suma, el costo es el colapso total del sistema de conocimiento considerado.

El imperativo de la razón, por lo menos para la racionalidad científica, cuando ella está determinada completamente por los postulados de razonamiento del Lógico clásico, es evitar la contradicción a toda costa. En el mundo de las matemáticas clásicas es evidente este imperativo. Recordemos que, para David Hilbert, la no contradictoriedad es condición necesaria y a la vez suficiente para que un determinado objeto exista y, por lo tanto, para que pueda ser considerado como un legítimo objeto matemático.

Algunos de los sistemas de lógica que estudiaremos en el marco de este texto (lecciones 12, 13 y 14) se postulan como opciones racionales para intentar dotar a la razón de la posibilidad de ir mas allá de los límites que le trazó la lógica clásica. Esto último implica ampliar, si se quiere, el dispositivo lógico de la razón para disponer de máquinas lógicas capaces de operar con lo incierto, lo ambiguo, lo que no se deja circunscribir en el marco dual de un rotundo Sí o de un rotundo No; y ciertamente, implica abrir la razón para dotarnos de la posibilidad lógica de razonar o realizar inferencias válidas, no obstante la presencia de algunas contradicciones verdaderas, por decirlo de alguna manera. Pero esto no puede hacerse de modo simple, sin criterios rigurosos. No. Semejante tarea también implica que de algún modo se ponga en consideración y se tenga en cuenta la dimensión pragmática de la razón. Para usar términos del lógico brasileño Newton da Costa, es posible mostrar, que pese a que algunos sistemas de lógica no clásica limitan el alcance de algunos de los principios que rigen al pensamiento racional (bivalencia, no contradicción, tercer excluido, doble negación), la razón sale vencedora. Que la razón salga airosa de este impase, quiere decir que aún se puede seguir hablando con sentido sobre aquello que rige el pensamiento racional, pese a que los postulados que se consideraban verdades necesarias y fundamentos de la racionalidad hayan sido transformados, relativizados, restringidos o limitados en su alcance. Si tenemos en cuenta lo que da Costa llama «principios pragmáticos de la razón», nos debemos ubicar en una posición epistemológica tal que estemos dispuestos a aceptar que "el ejercicio de la razón, así como el contexto racional, se encuentran sujetos a determinaciones contextuales, es decir, tanto los principios lógicos como los principios de las teorías científicas tienen que contextualizarse y ponerse en el horizonte de una racionalidad abierta, abierta a la dimensión pragmática".

Considero de suma importancia traer a cuento, en esta introducción, una breve síntesis de los planteamientos de da Costa sobre la dimensión pragmática de la razón, tomados, por cierto, del texto de Andrés Bobenrieth [1, p 370-371].

"El conocimiento racional es un conocimiento ordenado conceptualmente y para adquirir conocimientos se tiene que juzgar e inferir".

Los postulados que da Costa propone como principios pragmáticos de la razón son los siguientes:

- Principio de la sistematización: *la razón se expresa por medio de una lógica.*
- Principio de la unicidad: *en un contexto dado, la lógica subyacente es única.*
- Principio de adecuación: *la lógica subyacente a un contexto dado debe ser la que mejor se le adapte.*

Estos principios se constituyen, pues, en nuestros criterios para abrir la dimensión lógica de la razón. Si bien hay múltiples lógicas, la lógica subyacente a una teoría es una y sólo una, es decir es única en un contexto determinado; vale decir que los contextos, las regiones ontológicas tienen su dinámica y su lógica determinada en sumo grado por la experiencia. En términos de da Costa: "los sistemas lógicos tienen sus jurisdicciones delimitadas por la experiencia" [1, p 372]. En suma, el principio de adecuación legitima la existencia de múltiples lógicas y abre la razón a las multiplicidades, a la complejidad de la realidad.

Las indicaciones que he dado hasta el momento, constituyen solamente señuelos del camino que vamos a recorrer en este texto; espero que podamos realizar al menos algunos trayectos con el placer que otorga el adentrarse en tierras desconocidas.

Raúl Gómez Marin, 2004-2005.

Lección 0

Consideraciones sobre la divergencia entre lógicas no clásicas y lógica clásica

0.1. Primera consideración

Hacia finales del siglo XIX la «Lógica» transita por el camino de la certeza, segura de su unidad y universalidad. *Unidad*, en el sentido de que se tenia la convicción de que sólo exite una lógica: *la lógica aristotélica*; *universalidad,* en el sentido de que sus verdades se consideran independientes de toda experiencia y válidas universalmente: *verdades necesarias*. Y esto es así, porque se parte de la fuerte convicción de que estas verdades necesarias dependen de la *validez universal* de cuatro grandes principios lógicos, los cuales se cree que –sin duda alguna– proporcionan un fundamento cierto a la razón. Dicho de otro modo, en ese entonces *el principio de identidad, el principio de no contradicción, el principio de tercer excluido y el principio de bivalencia*, aparecen como principios supremos, evidentes e incuestionables de la razón.

Es justamente en este periodo que nos ocupa, en el que «lógica clásica» encuentra un cierto punto de perfección formal. En el año 1879, Fregue, siguiendo las huellas de Leibniz y Kant, se propuso formalizar la Lógica —transformando radicalmente algunos de sus supuestos metafísicos, sobre todo aquellos que tienen que ver con los principios lógicos—. Así, las bases y métodos de lógica, que el lógico moderno practica o cuestiona, se plantean y desarrollan en la obra de Fregue conocida como la *Begriffsschrift* (la *conceptografía o ideografía*).

Pero en el siglo XX, como bien lo sabemos, irrumpe con fuerza un movimiento del espíritu que inicia un proceso de transformación y *crítica* de las ciencias modernas.

La lógica clásica no escapó ciertamente al empuje crítico que fecundó dicho siglo. En efecto, la Lógica, ahora transformada en lógica matemática, es objeto de un cuestionamiento que alcanza tanto a sus fundamentos como a sus ámbitos epistemológico, ontológico y pragmático. Precisemos algunos de los aspectos básicos de este cuestionamiento.

En lo que a los fundamentos se refiere, la escuela de lógicos rusos (Vasiliev) y polacos (Lukasiewicz y Jaskowski) inicia una crítica que pone —quizas por primera vez— en cuestión la *necesidad* o validez universal del principio de «contradicción excluida [1]», aquel que Aristóteles declara como el más cierto y evidente de los principios de la razón. Dejamos abierto el siguiente problema de la interpretación planteada por el profesor Carlos Másmela: "El principio de contradicción –tal como lo conoce y formula la modernidad– es, en su esencia, diferente de aquel formulado por Aristóteles" [11].

Igualmente, el Intuicionismo matemático (que encuentra su formulación con Luitzen Brower), inicia una crítica estructural que recusa los fundamentos filosóficos de las matemáticas y la validez universal del principio del <tercer excluido>.

En la misma época, la escuela polaca genera algunos sistemas de lógica —rivales de la lógica clásica— que ahondan aún más en el problema de la unidad y de los fundamentos de la Lógica, y sobre todo, cuestionan el objeto mismo de la Lógica: *la verdad o lo verdadero*. (*La verdad*, como el objeto privilegiado de la Lógica aparece cuestionada y transformada). En efecto, en el ámbito intelectual de esta escuela se da la emergencia de los primeros sistemas formales que se construyen a expensas de la violación

» [1]Así, Jean Lukasiewicz publica el libro: "*Sobre el principio de contradicción en Artistóteles*" (1910) y Jaskowski publica el texto: "*Cálculo proposicional para sistemas deductivos contradictorios*" (1948).

del principio de (no) contradicción —la lógica discursiva de Jaskowski— así como el *primer sistema de lógica* que rompe con la validez universal del principio de «bivalencia»: *la lógica trivalente de Lukasiewicz*. Esta última <lógica> se caracteriza por el hecho de que introduce en el ámbito de lo verdadero (o *espacio alético*) un tercer valor de verdad ($\frac{1}{2}$). Ahora, este tercer valor *«alético»* no deja de ser problemático, pero aclaremos de una vez que la motivación de Lukasiewicz propende por un representar el *«tipo de aleticidad»* que le corresponde a las proposiciones que enuncian algo que se refiere al campo de lo posible o al futuro contingente —el paradigma de este tipo de oraciones es: mañana habrá una batalla en las afueras de Bogotá—, lo cual, a nuestro entender, amplifica y problematiza aún más la noción de <*proposición*> lógica, además del gradiente de complejidad que introduce en el ámbito del problema de la verdad.

Después de la aparición del sistema trivalente de Lukasiewicz, tiene lugar una proliferación de Lógicas formales que se proponen como rivales radicales de la lógica clásica bivalente, ahondando aún más su divergencia con respecto a los principios lógicos, especialmente con los de bivalencia y (no) contradicción: lógica trivaluada de Bochvar, Kleene, Smiley; lógicas multivaluadas de Lukasiewicz; lógica trivalente de Destuches-Février, etc.

La cuestión de la unidad y de la estructura de la «Lógica» se articulan pues con la confrontación que las lógicas no clásicas hacen al estatuto de la verdad clásica. Esta confrontación y rivalidad llega, por ejemplo, hasta la aparición de sistemas formales que abandonan radicalmente la concepción clásica de *la verdad* y se apuntalan en <criterios aléticos> no verifuncionales, concediendo la posibilidad de que exista un "*vacio de verdad*", o incluso, sistemas «dialéticos» que se postulan como sistemas de la verdad en doble vía (*Dialetheia*).

El movimiento crítico que nos ocupa también encuentra una poderosa expresión en la hoy llamada Escuela Lógica Brasileña. Es así como en los años cincuenta, y en lo referente tanto a la estructura como a los fundamentos, la Escuela Brasileña inaugura, con el proyecto lógico de Newton C. A. da Costa, una crítica epistemológica, lógica y ontológica: es en el marco de este proyecto donde Newton C. A. da Costa produce sus primeros *sistemas formales inconsistentes* (más tarde designados con el nombre de *lógicas paraconsistentes*), lógicas que se proponen por primera vez en la obra de da Costa conocida como: "*Sistemas Formais Inconsistentes*"

(1964).

La aparición y desarrollo de los sistemas de lógica <paraconsistente> de da Costa estimuló la investigación lógica, de tal modo que a partir de ese entonces se han creado un sin número de sistemas de lógicas que se postulan como *lógicas divergentes* de la lógica clásica —en la medida en que algunas de ellas buscan contrariar *la validez universal* del principio de (no) contradicción (bajo su forma moderna) y, sobre todo, en el hecho de que logran establecer una distinción radical entre <contradicción> y <*trivialización*>—. Da Costa por ejemplo, para construir su primer sistema C_1, parte del *postulado* de que en general no debe ser válido universalmente el esquema formal:

$$\neg(A \wedge \neg A).$$

Donde el signo '$\neg$' representa la 'negación' básica de su sistema, el símbolo 'A' representa una proposición lógica cualquiera y el signo '$\wedge$' representa la constante lógica 'y'. [1]

Decimos que los sistemas de lógica paraconsistente confrontan estructuralmente a la lógica clásica en la medida en que, por un lado, rompen su unidad por el otro; recusan la universalidad de sus 'principios' de razonamiento al invalidar algunas de las reglas de inferencia válidas en las lógicas clásicas (este es el caso que se presenta, por ejemplo, con las conocidas reglas del *«silogismo disyuntivo»* y del *«Pseudo-Scoto»*) y, sobre todo, porque descubren la dimensión constructiva y positiva de la «contradicción» en el seno de las teorías inconsistentes.

Los llamados sistemas de lógicas no clásicas han instaurado, pues, una divergencia con la lógica clásica; divergencia que se expresa en el hecho de que se han logrado construir sistemas formales que, de un modo u otro, se exponen con la pretensión de cuestionar la unidad y la universalidad de la lógica clásica —considerada hasta mediados del siglo XX como el auténtico *organon* de la razón—.

0.2. Segunda consideración

Ahora pasemos a desarrollar una cierta idea sobre los alcances epistemológicos de la divergencia creada por las lógicas trivaluadas, sin dejar de lado, por supuesto, que su cuestionamiento implica también una crítica a la concepción moderna de la verdad, la cual podemos circunscribir en la definición semántica de verdad propuesta por Fregue-Tarski. [*Ver ejercicio 6*]

Es importante que antes hagamos algunas aclaraciones. La noción de «proposición» que vamos a usar a lo largo de este texto se limita a aquello que se enuncia y aserta en un enunciado, y no se refiere por tanto al acto de enunciar o asertar. Así mismo, tendremos presente que casi en todos los casos un <sistema de lógica> sólo retiene como objeto de su ámbito epistémico la forma y el valor semántico de una proposición. También es bueno recordar que en materia de Lógica es usual no instaurar una distinción entre proposición y enunciado, de allí que se hable bien sea de lógica de proposiciones o bien sea de lógica de enunciados. En la misma dirección antes anotada se sostiene en el ámbito de la lógica clásica que si bien son las oraciones las que tienen significado, son los enunciados los que tienen valor de verdad; por lo tanto, es entre ellos que se establecen las relaciones lógicas. Es esta concepción la que precisamente hace pensar a Fregue que una cierta oración, que contenga un término-sujeto que *no denote*, tiene sentido; pero fracasa en cuanto a la *referencia* y, consecuentemente, una tal oración no puede tener ningún valor de verdad. En otras palabras, oraciones con sujeto no denotativo no son enunciados, luego no pueden ser objetos de la Lógica (el paradigma de este tipo de oración lo constituye la oración Russelliana: "El rey de Francia es calvo").

No obstante la concepción de Fregue sobre la denotación, es conocido cómo Russell intenta resolver este problema con su teoría de las descripciones. Según Russell, el paradigma anterior quedaría representado por el enunciado formal:

$$\exists x[(Fx \wedge Cx) \wedge \quad \forall y(G(y) \supset y = x)]$$

La primera cuestión importante a discutir con respecto al problema planteado a la teoría de la verdad clásica por las «lógicas trivalentes» es la siguiente: ¿En esencia se puede decir que estas lógicas introducen de hecho una modificación significativa de la teoría de la verdad? Más específicamente, se trata de preguntar por la interpretación del *tercer valor* ($\frac{1}{2}$) y por los aspectos concernientes a si efectivamente se ha introducido o no un nuevo valor de verdad que incapacita, por así decirlo, la teoría de la verdad clásica.

El asunto así planteado toca en últimas con la pregunta: si nos conviniéramos en una interpretación adecuada del 'tercer valor alético', ¿es de esperar que el esquema de suficiencia material de Tarski (el esquema de suficiencia para toda definición de la verdad que aspire a ser suficiente) permanezca válido para un sistema de lógica trivalente que contara con dicha interpretación? Intentemos dilucidar un poco el sentido de esta pregunta.

Se sabe que Alfred Tarski mostró que la definición semántica de la verdad implica al principio del *«tertio non datur»* que, en términos de Tarski, viene expresado así:

$$\forall x(x \in V_R \vee \bar{x} \in V_R)$$

Donde V_R denota al conjunto de las proposiciones verdaderas y $\bar{x}$ denota la negación del enunciado x. Como puede observarse esta formulación se corresponde con aquella otra que suele presentarse para darle forma al *«principio de bivalencia»*:

$$V(x) \vee F(x)$$

Donde $V(x)$ expresa que el enunciado x es verdadero y $F(x)$ expresa que el enunciado x es falso.

Lo anterior nos muestra que existe indudablemente una relación lógica entre el principio de bivalencia (PB) y el principio del tercer excluido. Pero hay que tener en cuenta que, en cierto sentido, esta relación no es directa. En efecto, Susan Haack muestra que esta relación es restrictiva: "de hecho parece que se puede derivar PB no sólo de la definición semántica de la verdad, sino también del esquema (V) de Tarski".

Para formarnos una idea clara de lo anterior, presentamos, un poco modificada, la prueba de Haack [8], que nos muestra que el «principio de bivalencia» también depende del 'criterio' V de Tarski; claro, si razonamos clásicamente.

Demostración 0.1. Sea '$V(p) \equiv p$' la codificación del esquema (V) de Tarski. Probemos que: $V(p) \equiv p \Rightarrow PB$

$0. V(p) \equiv p$	Esquema (V)
$1. p \supset V(p)$	Def $\equiv$ en 0. Simplificación
$2. \sim V(p) \supset \quad \sim p$	Contradirecto en 1
$3. V(\sim p) \equiv \sim p$	Esquema (V) sobre $\sim p$
$4. \sim p \supset V(\sim p)$	Def $\equiv$ en 3. Simplificación
$5. \sim V(p) \supset V(\sim p)$	Transitividad 2,4
$*6. \sim\sim V(p) \vee V(\sim p)$	Condicional disyunción en 5
$*7. V(p) \vee V(\sim p)$	R. substitución: $\sim\sim p \equiv p$, en 6
$*8. V(p) \vee F(p)$	$V(\sim p) = F(p)$

Desde esta perspectiva (de la noción de verdad) se infiere, pues, que aceptar el *esquema V* de Tarski implica asegurar ya la validez del PB clásico. Y, por el contrario, la negación del PB conducirá a la negación del esquema de Tarski. Esto es, que clásicamente existe una estrecha codependencia o relación entre el esquema V de Tarski y los principios de bivalencia y tercer excluido.

Para una mejor comprensión del problema que nos ocupa es importante tener en cuenta la siguiente consecuencia: El hecho de que un determinado enunciado no sea ni verdadero ni falso, o que no pueda ser ambos a la vez, hace que éste no se pueda considerar como un *«objeto»* de la lógica clásica: lo verdadero (1) y lo falso (0) son exhaustivos y mutuamente excluyentes. Este es, justamente, uno de los rasgos esenciales de la concepción lógica de la verdad moderna, apuntalada, obviamente, en la lógica clásica.

Si aceptamos, como lo hace el lógico clásico, que la «falsedad» es la verdad de la negación –que $V(\sim p)$ equivale a la falsedad de p–, esto es: $V(\sim p) = F(p)$, y si tenemos en cuenta los anteriores rasgos de exhaustividad y exclusión mutua de los valores de verdad clásicos, entonces podríamos decir:

Si aceptamos que los valores «aléticos» 0 y $\frac{1}{2}$ son dos modos (de ser) de lo falso, entonces se perderían estos dos rasgos esenciales de la verdad: En la medida en que el valor alético de '$\sim p$'–que denotamos por $/\sim p/$, en una interpretación adecuada– sea $(\frac{1}{2})$, cuando el valor alético de p sea $\frac{1}{2}$; es decir: $/p/ = /\sim p/ = \frac{1}{2}$. En consecuencia, en un tal sistema de lógica trivaluada no se preserva la concepción clásica de la verdad, puesto que lo que allí se da en última instancia es un rechazo de la *negación clásica* (aun si se considera a '$\frac{1}{2}$' como *no designado* y *no antidesignado*[2]). Si por otro lado, el tercer valor '$\frac{1}{2}$' se considerará como valor *«designado»*, esto es, un cierto modo de ser de lo verdadero, entonces tendríamos que algunas contradicciones *son verdades:* Esto es, si $/p/ = \frac{1}{2}$, y se tiene que: $/\sim p/ = \frac{1}{2}$, entonces $/p \wedge \sim p/ = \frac{1}{2}$; de este modo la contradicción '$p \wedge \sim p$' será un tipo de verdad o una aserción de $p \wedge \sim p$. En consecuencia, también perdemos los «criterios de verdad»y los rasgos esenciales que la lógica clásica le ha impuesto a la verdad, específicamente perdemos la «consistencia» en la verdad.

Y, en última instancia, si se tomara '$\frac{1}{2}$' como valor *«antidesignado»* (es decir, como un cierto *modo de ser de lo falso*), se tendría que $/p \vee \sim p/ = \frac{1}{2}$ ('p' y '$\sim p$' serían ambos falsos), y en consecuencia, perderíamos el principio de bivalencia y la <completez> de la verdad.

Resulta pues que desde el campo de una «lógica trivaluada» no es cosa fácil la cuestión del estatuto de la teoría de la verdad; mucho menos lo es la cuestión epistemológica acerca de si los *valores* aléticos intermedios deben o no ser considerados como auténticos valores de verdad y, sobre todo, es problemático el fundamento dado por los principios lógicos y, particularmente, si debe o no abandonar la concepción de la verdad (al recusar el principio de bivalencia) en una lógica trivaluada.

En suma, hemos intentado introducir el problema de la divergencia y la rivalidad de las lógicas no clásicas desde una perspectiva histórica, a la vez que iniciar una aproximación al 'problema' de la verdad en el marco de un sistema de <lógica trivalente>. Esperamos que el desarrollo de este curso nos permita ahondar en los problemas planteados, así como tomar algunas posiciones epistemológicas cada vez más claras.

0.3. Ejercicios

Elaborar un informe de lectura de los siguientes textos:

1. Artistóteles. *Metafísica*, "Libro Γ". Barcelona. Gredos 1982.

[2]Un valor alético *designado* es algo así como un modo de ser de lo verdadero, y un valor *antidesignado* es algo así como un modo de ser de lo falso

2. "*El principio de contradicción*". En: Tugendhat, Ernst y Wolf Ursula. *Propedéutica lógico-semántica*. Barcelona, Anthropos, 1997, pp 47 - 58.

3. João, Marcos. *Wittgenstein y paraconsistencia*. Unicamp, Brasil.

4. Las paradojas y la primera postura no clásica [1].

5. Haack, Susan. "*La divergencia y la teoría de la verdad*". En: Lógica divergente. Barcelona, Paraninfo, 1980. PP 56-79.

6. Tarski, Alfred. *La semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*. Madrid, Nueva Visión 1990.

0.4. Referencias bibliográficas

Para un acercamiento un poco más detallado y amplio de los temas tratados en esta lección, el lector puede remitirse a los siguientes textos: [8], [5] y [1].