

Métodos numéricos

Francisco José Correa Zabala



Correa Zabala, Francisco José

Métodos numéricos / Francisco José Correa Zabala. -- Medellín : Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2010.

296 p. : il. ; 24 cm. -- (Colección académica)

ISBN 978-958-720-078-2

1. Algoritmos (Computadores) 2. Programación (Computadores)
3. Análisis numérico 4. Ingeniería matemática I. Tít. II. Serie.
005.1 cd 21 ed.

A1273184

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Métodos numéricos

Primera edición: noviembre de 2010

Tercera reimpresión: julio de 2018

© Francisco José Correa Zabala

© Fondo Editorial Universidad EAFIT

Cra. 49 No. 7 sur - 50. Tel. 261 95 23

www.eafit.edu.co/fondoeditorial

Correo electrónico: fonedit@eafit.edu.co

ISBN: 978-958-720-078-2

Ilustración de carátula: Marcela Márquez Paniagua

Editado en Medellín, Colombia

Contenido

1	Introducción	15
1.1	Enfoque por competencias	15
1.2	Descripción de la competencia	17
1.2.1	Competencias previas	18
1.2.2	Competencias según sus áreas de aplicación	19
2	Preliminares	23
2.1	Una primera mirada al análisis numérico	25
2.1.1	Problema	26
2.1.2	Modelo	27
2.1.3	Formulación matemática	28
2.1.4	Solución	29
2.2	La computación científica y el análisis numérico	32
2.2.1	Modelos matemáticos	32
2.2.2	La solución numérica	32
2.2.3	El ambiente computacional	34
2.3	Fuentes de error	35
2.3.1	Modelo	36
2.3.2	Método empleado	37
2.3.3	Máquina usada	38
2.3.4	Los datos	38
2.4	Error absoluto y error relativo	39
2.4.1	Error absoluto E	40
2.4.2	Error relativo \mathcal{E}	42
2.5	Decimales correctos y cifras significativas	44
2.5.1	Notación numérica	44
2.5.2	Notación de punto flotante	46
2.5.3	Clases de redondeo	47
2.5.4	Decimales correctos	51
2.5.5	Cifras significativas	52
2.5.6	Calidad en las cifras y el error	54

2.6	Los números en el computador	61
2.6.1	Números máquina máximos y mínimos	62
2.6.2	Densidad de los números reales	63
2.6.3	Distribución de los números máquina en la recta real	64
2.6.4	Cantidad de cifras decimales según un número máquina	64
2.6.5	Los números máquina son finitos	65
2.6.6	Propiedades de las operaciones en los números reales	65
2.7	Exactitud y dispersión	68
2.8	Errores en la solución de un problema	71
2.8.1	Errores inherentes	72
2.8.2	Errores de truncamiento	72
2.8.3	Error de redondeo	74
2.9	Propagación de errores	75
2.9.1	Propagación de errores en cálculos	76
2.10	Métodos y algoritmos numéricos	87
2.10.1	Del método numérico a los algoritmos	87
2.10.2	Estabilidad de los algoritmos	87
2.10.3	Criterios para detener un proceso computacional	88
3	Ecuaciones de una variable	91
3.1	Preliminares	92
3.1.1	Significado de resolver una ecuación de una variable	92
3.1.2	¿Qué se necesita para resolver ecuaciones de una variable?	94
3.2	Métodos para determinar aproximaciones iniciales	95
3.2.1	Las condiciones del problema	95
3.2.2	Gráfica de la función asociada a la ecuación	95
3.2.3	Búsquedas incrementales	96
3.3	Métodos por intervalos o cerrados	102
3.3.1	Método de la bisección	102
3.3.2	Regla falsa	108
3.4	Métodos abiertos	110
3.4.1	Punto fijo	110
3.4.2	Método de Newton	123
3.4.3	Método de la secante	131
3.4.4	Método de las raíces múltiples	136
3.5	Análisis comparativo de la convergencia	138
4	Sistemas de ecuaciones lineales	141
4.1	Preliminares	142
4.1.1	¿Qué significa resolver un sistema de ecuaciones?	142
4.1.2	Tipos especiales de matrices	144
4.2	Métodos directos	147

4.2.1	Eliminación gaussiana simple	148
4.2.2	Análisis del método de la eliminación gaussiana simple	157
4.2.3	Eliminación gaussiana con pivoteo parcial	161
4.2.4	Eliminación gaussiana con pivoteo total	164
4.2.5	Factorización de matrices	169
4.2.6	Factorización LU con eliminación gaussiana simple	170
4.2.7	Factorización LU con pivoteo parcial	174
4.2.8	Factorización directa de matrices	180
4.3	Métodos basados en tipos especiales de matrices	194
4.4	Métodos iterativos	200
4.4.1	Normas en espacios vectoriales	205
4.4.2	Métodos iterativos con matrices	208
4.4.3	Algoritmos de los métodos	209
4.5	Métodos de relajación	218
5	Interpolación	223
5.1	Preliminares	225
5.2	Método basado en sistemas de ecuaciones	226
5.3	Polinomio interpolante de Newton	229
5.4	Diferencias divididas	232
5.5	Polinomio interpolante de Lagrange	238
5.6	Método de Neville	241
6	Integración numérica	245
6.1	Método del trapecio	246
6.2	Método compuesto del trapecio	249
6.3	Método de Simpson 1/3	252
6.4	Método compuesto de Simpson 1/3	254
6.5	Método de Simpson 3/8	258
7	Ecuaciones diferenciales	261
7.1	Preliminares	261
7.1.1	Existencia y unicidad de las soluciones	266
7.2	Método de Euler	267
7.2.1	Análisis del error en el método de Euler	270
7.3	Métodos de Taylor de orden superior	275
7.4	Método de Heun	276
7.4.1	Análisis del error en el método de Heun	277
7.4.2	Otra forma de explicar el método de Heun	278
7.5	Métodos de Runge-Kutta	281
7.5.1	Runge-Kutta de orden 2	282
7.5.2	Runge-Kutta de orden 3	283
7.5.3	Runge-Kutta de orden 4	283

Bibliografía	285
Índice de materias	289

Índice de figuras

1	Etapas en la solución de un problema	26
2	Fuentes de error	36
3	Algunos relojes usados para medir el tiempo	38
4	Relación entre el error y la calidad de las cifras	60
5	Esquema de almacenamiento de un número real	62
6	Límites de almacenamiento en la recta real	63
7	Distribución de los números máquina	64
8	Tipos de error	71
9	Propagación de errores	79
10	Raíces de una ecuación	92
11	Valores iniciales	96
12	Existencia de raíces de una ecuación	97
13	Búsquedas incrementales	98
14	Aplicación del método de búsquedas incrementales	100
15	Método de la bisección	102
16	Método de la regla falsa	109
17	Método de punto fijo	111
18	Método de punto fijo	117
19	Análisis de convergencia del método de punto fijo	121
20	Explicación gráfica del método de Newton	125
21	Explicación gráfica del método de la secante	133
22	Comparación del polinomio interpolante de una función	228
23	Método del trapecio	247
24	Método del trapecio generalizado	250
25	Método del trapecio	252
26	Método de Simpson 1/3 generalizado	255
27	Método del trapecio	258
28	Solución de $y' = x^2/9 - 2$	264
29	Solución de $y' = x^2/9 - 2$ con $y(0) = 2$	264
30	Explicación gráfica del método de Euler	269
31	Solución de $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 18x^2 - 24x + 5$ con $h = 0.25$	274

Índice de tablas

1	Competencias específicas para desarrollar en el curso	17
2	Métodos para la solución de un problema	31
3	Competencias específicas desarrolladas en el Capítulo 3	93
4	Tabla de ejecución del método de la bisección	103
5	Tabla de resultados del método de la secante	135
6	Tabla de ejecución del método de Jacobi	203
7	Tabla de ejecución del método de Gauss Seidel	204
8	Tabla de ejecución del método de relajación con $\omega = 1$	221
9	Tabla de ejecución del método de relajación con $1 < \omega < 2$	221
10	Polinomio de Newton con diferencias divididas	235
11	Ejemplo del polinomio de Newton con diferencias divididas	236
12	Método de Neville	243
13	Ejemplo del método de Neville	243
14	Ejemplo del método de Euler	274
15	Ejemplo del método de Heun	280

Índice de algoritmos

1	Épsilon de la máquina	67
2	Cálculo del menor número positivo	67
3	Método de búsquedas incrementales	99
4	Método de la bisección	105
5	Método de punto fijo	115
6	Método de Newton	127
7	Método de la secante	134
8	Macro algoritmo de la eliminación gaussiana simple	149
9	Eliminación gaussiana sin intercambio de filas	154
10	Sustitución regresiva	156
11	Estructura de eliminación gaussiana con pivoteo	161
12	Estructura de eliminación gaussiana con pivoteo parcial	164
13	Estructura de eliminación gaussiana con pivoteo total	168
14	Estructura básica de un método factorización de matrices	169
15	Factorización de matrices con pivoteo parcial	175
16	Factorización LU con pivoteo parcial	179
17	Factorización directa de matrices	191
18	Factorización de matrices para varios sistemas de ecuaciones	192
19	Factorización de matrices para varios sistemas de ecuaciones	193
20	Eliminación gaussiana simple para sistemas tridiagonales	199
21	Eliminación gaussiana para sistemas tridiagonales	199
22	Método de Jacobi	210
23	Iteración de método de Jacobi	211
24	Iteración del método de Gauss Seidel	212

Agradecimientos

*A mi Marta, mi familia,
mis amigos, mis profesores
mis alumnos...*

En el momento de entregar a la comunidad un producto como éste, uno no deja de pensar en las personas que de algún modo tuvieron que ver con su logro. Son muchas las dificultades, las largas horas de trabajo, los éxitos, los fracasos..., en fin; son muchas las cosas que pasan alrededor de una experiencia, que por encima de todo, es de lo mejor que he vivido. Tengo que agradecer a mi esposa, Marta, quien me ha acompañado en todo momento, siendo mi soporte y apoyo. A mi familia y mis amigos, a quienes he descuidado, pero que están ahí, siempre conmigo. A la Universidad EAFIT y en su nombre a todos los directivos que en alguna medida me han apoyado para desarrollar este producto. A mis profesores, quienes han dejado una huella en mi formación como persona y profesional; parte de sus enseñanzas y críticas están plasmadas en el texto. Al doctor Carlos Enrique Mejía Salazar, quien con su apoyo, su amistad, asesoría en mi sabático y sus sabios consejos hace realidad esta obra. A mis alumnos, con los cuales durante los años de experiencia en los cursos relacionados con este texto me han hecho aportes para desarrollar las ideas y estrategias que lo guían.

Al disponer de un borrador de esta obra, algunos de mis alumnos y monitores se dieron a la tarea de hacer una lectura del texto. Sus sugerencias han sido muy importantes y valiosas. Paso a mencionar algunos, y espero no haber dejado alguno por fuera: Alejandro Arenas Vasco, María Cristina Bravo Gómez, Alejandro Betancourt Arango, José Luis Franco Monsalve, Carolina Vélez López, J. Sebastián Palacio Montoya, Marcela Gutiérrez Mejía, Sebastián Mejía Velásquez, Shirley Bibiana Vélez Durango, Julio Andrés Vega Giraldo, María Fernanda Estrada Martínez, Sebastián Arcila Valenzuela y Hernán Darío Metaute Sarmiento. Finalmente, a Marcela Marquez Paniagua por el diseño del dibujo de la portada.

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de este libro es proporcionar al lector un camino fácil y agradable para dar los primeros pasos en el estudio del análisis numérico. Presentamos una obra para que quien la siga disponga de un conjunto de recursos con una buena introducción al área, y de un manual de referencia ágil con herramientas prácticas para su uso.

Al finalizar la presente sección esperamos que el lector logre reconocimiento del alcance del curso y su importancia frente al proceso de formación como ingeniero. Para lograrlo, vamos a:

- Establecer criterios mínimos para un buen desempeño en el curso.
- Presentar las competencias específicas del área que los estudiantes deben demostrar al finalizar el curso.
- Plantear una primera definición de análisis numérico.
- Identificar cada una de las etapas que intervienen en la solución de un problema, determinando el papel de los métodos numéricos.
- Reconocer las posibles formas de solución de un problema.

Con este libro y el *software* anexo como material de apoyo se busca que los estudiantes dispongan de un conjunto de recursos que permitan el logro de las competencias planteadas. El software se encuentra disponible en la dirección www1.eafit.edu.co/cursosnumerico/.

1.1 Enfoque por competencias

El texto ha sido pensado y diseñado bajo el enfoque de competencias siguiendo lo planteado por el proyecto *Tuning* (Beneitone *et al.*, 2007) y por Tobón

(2010a,b). Para ello, definimos las competencias que el estudiante debe adquirir al desarrollar los diferentes elementos que implican el seguimiento del texto y la utilización de sus herramientas de apoyo.

En cada uno de los ambientes de aprendizaje propuestos por el docente, se entrelazan las diferentes metas definidas por la institución educativa para la formación del estudiante en su profesión específica, a la luz del perfil profesional. En la realización de las actividades que planteamos y de las que se infieren de forma directa o indirecta se busca la formación, de forma transversal, del estudiante en las siguientes competencias genéricas del proyecto *Tuning*:¹

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para aplicar los conocimientos en la práctica.
- Habilidades en uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Capacidad de investigación.
- Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

Planteamos estas competencias como una invitación al docente para que las reformule y genere un conjunto de acciones para su desarrollo. Además, esperamos que se incorporen en el proceso competencias relacionadas con valores sociales, habilidades interpersonales y el contexto internacional.

De forma similar, planteamos las competencias relacionadas con la formación de ingenieros:

- Aplicar conocimientos de las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería.
- Modelar y simular procesos y sistemas de la ingeniería.
- Concebir, analizar, proyectar y diseñar soluciones en relación con su profesión.
- Manejar e interpretar información de campo (de la realidad).
- Utilizar, elaborar programas o sistemas de computación para la solución de sus problemas. numéricos. Competencias Sistémicas Instrumental

¹ Las competencias mencionadas hacen parte de un listado mayor y su elección se justifica en la medida en que podemos encontrar evidencias de su desarrollo en las actividades propuestas para apuntar a las metas deseadas, aunque esperamos que los docentes enriquezcan aún más esta relación.

1.2 Descripción de la competencia

Diseñar y aplicar métodos numéricos, de manera eficiente y con herramientas computacionales, en la solución de problemas de aplicación que involucran modelos matemáticos, procurando que la solución obtenida mediante la aplicación de los diferentes algoritmos disponga de argumentos de calidad.

Niveles	Criterios
<p><i>Primero: conocimiento.</i> Identifica, utiliza y reformula las nociones y conceptos que permiten generar y caracterizar los métodos numéricos</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Describe y utiliza las nociones matemáticas involucradas en la definición de un método numérico 2. Formula nociones matemáticas de forma discreta para la definición de métodos numéricos 3. Describe los alcances y dificultades de un método numérico apoyado en argumentos matemáticos
<p><i>Segundo: comprensión.</i> Analiza los métodos numéricos desde el punto de vista matemático y algorítmico</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Formula de forma detallada cada uno de los pasos de un método numérico utilizando argumentos matemáticos y/o computacionales 2. Elabora o utiliza algoritmos relacionados con métodos numéricos 3. Utiliza argumentos matemáticos para describir un método numérico 4. Reconoce argumentos teóricos para argumentar sobre la calidad de las soluciones obtenidas en la aplicación de un método numérico
<p><i>Tercero: aplicación.</i> Utiliza métodos numéricos para la solución de problemas</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Dado un problema, selecciona el método adecuado para su solución 2. Razona sobre la calidad de la solución obtenida por la aplicación de un método numérico

Tabla 1. Competencias específicas para desarrollar en el curso

1.2.1 Competencias previas

Pretendemos presentar de forma simple las competencias que el lector debe haber desarrollado. No es una lista exhaustiva de los problemas involucrados, y por estrategia metodológica trataremos en el desarrollo de cada tema de presentar los fundamentos que se necesiten para el logro de las metas de la actividad propuesta.

1. Disponer del manejo de un lenguaje de programación o herramientas computacionales en las que se puedan diseñar y ejecutar los algoritmos correspondientes a los métodos numéricos desarrollados.
2. Disponer de los fundamentos que proporciona el cálculo integral y diferencial.
3. Reconocer el significado básico en relación con cada una de las siguientes áreas o expresiones, aunque en general en el desarrollo del texto se exponen argumentos para que los temas sean autocontenidos.

- 1) Ecuaciones de una variable. Dada una ecuación en la que esté involucrada una variable, se pretende encontrar el valor de la variable que hace cierta la ecuación. Por ejemplo, $x = 2$ es la solución de la ecuación

$$2^{x+3} - x^4 + 3 = 3^x + 10$$

- 2) Sistemas de ecuaciones lineales. Dado un conjunto de ecuaciones lineales, determinar el conjunto de valores que las hacen ciertas de forma simultánea. Por ejemplo, $x = 0, y = 2, z = -1$ es la solución del siguiente sistema

$$\begin{aligned} 6x - 3y + 4z &= -10 \\ 5x + 4y - z &= 7 \\ 3x + 2y + 5z &= -1 \end{aligned}$$

- 3) Ajustes de curvas. Reconocer los aspectos fundamentales de los polinomios en los números reales

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- 4) Diferenciación. Determinar el significado y el valor correspondiente a la derivada evaluada en un valor. Por ejemplo, el valor de $f'(2)$ dada la función $f(x) = \cos(x) - 3x^2 - 1$ es

$$f'(2) = -12.9092$$

- 5) Integración. Hallar el valor de una integral definida. Por ejemplo

$$\int_1^2 \frac{\ln(x+3)}{\operatorname{sen}(x) - 6x} dx$$

- 6) Ecuaciones diferenciales. Dada una ecuación diferencial, se pretende hallar su solución (se utiliza la integración como una de las herramientas para la solución de una ecuación diferencial). Por ejemplo, la función $f(x) = x^3/3 + 4x - 5$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4$$

4. Reconocer los elementos matemáticos que fundamentan la solución y los correspondientes métodos analíticos para la solución de:

- 1) Ecuaciones de una variable. Propiedades de la igualdad, funciones de variable real y sus correspondientes inversas. Solución gráfica de una ecuación. Significado de ecuación y aplicaciones del concepto.
- 2) Sistemas de ecuaciones lineales. Álgebra de vectores y matrices, propiedades de la igualdad, métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones: sustitución, despeje, igualación, regla de Cramer, etc. Solución gráfica de un sistema de ecuaciones. Significado de los sistemas de ecuaciones y aplicaciones del concepto.
- 3) Ajuste de curvas. Teoría de funciones. Significado de función y aplicaciones del concepto.
- 4) Diferenciación. Significado de la derivada y aplicaciones del concepto. Cálculo de la derivada de una función dada. Propiedades de la derivada.
- 5) Integración. Significado de la integral y aplicaciones del concepto. Cálculo de la integral de una función dada. Propiedades de la integral.
- 6) Ecuaciones diferenciales. Significado de las ecuaciones diferenciales y aplicaciones del concepto. Métodos directos para la solución de ecuaciones diferenciales.

1.2.2 Competencias según sus áreas de aplicación

1. Errores en cálculos numéricos

- 1) Detectar la presencia de errores en cálculos numéricos al utilizar el computador como herramienta de trabajo, reduciendo su efecto y causas.

- 2) Reconocer la forma como se manejan los aspectos numéricos en un computador, determinando estrategias para minimizar sus efectos inadecuados.

2. Ecuaciones de una variable

- 1) Definir métodos numéricos para la solución de ecuaciones de una variable utilizando argumentos matemáticos y computacionales.
- 2) Determinar las raíces de una ecuación no lineal dada empleando los métodos numéricos de manera eficiente y analizando los problemas de convergencia que puedan presentarse.

3. Sistemas de ecuaciones lineales

- 1) Definir métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones utilizando argumentos matemáticos y computacionales.
- 2) Resolver problemas que se reducen a sistemas de ecuaciones lineales.
- 3) Emplear los diferentes algoritmos para resolver sistemas de ecuaciones lineales ahorrando tiempo de cómputo, posiciones de memoria y reduciendo los errores.

4. Interpolación

- 1) Definir métodos numéricos para determinar una función polinómica que aproxime el comportamiento de un conjunto de valores o una función no polinómica utilizando argumentos matemáticos y computacionales.
- 2) Determinar el polinomio que interpola un conjunto de valores o una función no polinómica.

5. Integración y diferenciación numérica

- 1) Definir métodos numéricos para la solución del cálculo de derivadas e integrales de forma numérica utilizando argumentos matemáticos y computacionales.
- 2) Aplicar las técnicas numéricas de derivación e integración numéricas en la solución de problemas específicos.

6. Ecuaciones diferenciales

- 1) Definir métodos numéricos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1 utilizando argumentos matemáticos y computacionales.
- 2) Aplicar técnicas numéricas en la solución de modelos basados en ecuaciones diferenciales.

Para el desarrollo del texto, recordamos utilizar el material que lo acompaña y que en adelante nos referiremos a él como “sistema interactivo de apoyo” al cual se accede desde internet en la dirección *www1.eafit.edu.co/cursosnumerico*. Cada capítulo está dividido en secciones en las que se encuentra una variedad de materiales para el logro de las competencias propuestas al abordar el estudio del texto. En general, cada sección contiene videos introductorios, diapositivas con sonido, preguntas frecuentes y material de apoyo, evaluación y autoevaluación.

A lo largo del texto utilizamos dos imágenes a modo iconográfico. La de los delfines pretende llamar la atención sobre aspectos relevantes para la comprensión, propiciar el conocimiento significativo, destacar elementos de competencia y proporcionar relaciones con los saberes anteriormente adquiridos. La del puente representa aprendizajes, relaciones y competencias para desarrollar por parte del estudiante.

