

Dinámica de estructuras
Sistemas de un grado de libertad

Juan Carlos Botero Palacio



Botero Palacio, Juan Carlos

Dinámica de estructuras: sistemas de un grado de libertad / Juan Carlos Botero Palacio. -- Medellín: Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2011.

244 p. ; 24 cm.

Incluye bibliografía

ISBN 978-958-720-085-0

1. Dinámica de estructuras 2. Diseño de estructuras 3. Mecánica de

Materiales I. Tít.

624.17 cd 21ed.

A1281876

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Dinámica de estructuras Sistemas de un grado de libertad

Primera edición: abril de 2011

Segunda reimpresión: enero de 2015

© Juan Carlos Botero Palacio

© Fondo Editorial Universidad EAFIT

Carrera 48A No. 10 sur - 107

Tel.: 261 95 23, Medellín

<http://www.eafit.edu.co/fondoeditorial>

e-mail: fonedit@eafit.edu.co

ISBN: 978-958-720-085-0

Diseño de colección: Miguel Suárez

Imagen de carátula: *Chichen Itza, Mexico*, subido por: d_hatch,
disponible en: www.sxc.hu, consulta: 9 de marzo de 2011

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de los editores.

Editado en Medellín, Colombia

Tabla de contenido

Presentación	15
--------------------	----

Capítulo 1

Introducción a la dinámica estructural	17
1.1 Antecedentes históricos	19
1.2 Conceptos fundamentales utilizados en la dinámica.....	25
1.3 Hipótesis del análisis estructural.....	27

Capítulo 2

Modelación dinámica de sistemas físicos	31
2.1 Descripción del modelo dinámico de un sistema físico.....	31
2.2 Propiedades de inercia	32
2.3 Propiedades de amortiguamiento	33
2.4 Propiedades de rigidez	34
2.4.1 Resortes en serie	36
2.4.2 Resortes en paralelo	38
2.5 Elaboración de modelos	42
2.6 Ejercicios propuestos	43

Capítulo 3

Vibración libre no amortiguada	45
3.1 Modelo de un sistema sometido a vibración libre no amortiguada	45
3.2 Ejercicios propuestos	57

Capítulo 4

Vibración libre amortiguada.....	63
4.1 Modelo de un sistema sometido a vibración libre amortiguada	63
4.2 Caso 1. Sistemas con amortiguamiento crítico	66
4.3 Caso 2. Sistemas sobreamortiguados	68
4.4 Caso 3. Sistemas subamortiguados	70
4.5 Cálculo del amortiguamiento conociendo la respuesta	80
4.6 Ejercicios propuestos	83

Capítulo 5

Vibración forzada con excitación armónica.....	89
5.1 Modelo de un sistema dinámico sometido a excitación armónica aplicada en la masa	90
5.1.1 Sistema sometido a excitación armónica de tipo seno ...	91
5.1.2 Sistema sometido a excitación armónica de tipo coseno	95
5.1.3 Sistema sometido a excitación armónica de tipo $F_0 e^{i\lambda t}$...	98
5.1.4 Respuesta completa del sistema	101
5.1.5 Análisis de la amplitud de desplazamiento X	102
5.1.6 Análisis del ángulo de desfase ϕ	105
5.2 Modelo de un sistema dinámico sometido a excitación armónica aplicada en la base	106
5.2.1 Movimiento relativo.....	106
5.2.2 Movimiento absoluto	110
5.2.3 Comparación entre el movimiento relativo y el absoluto.....	114
5.3 Ejercicios propuestos	124

Capítulo 6

Respuesta elástica en el dominio del tiempo	131
6.1 Método directo.....	133

6.2	Método β de Newmark	140
6.2.1	Método β de Newmark con aceleración uniforme	140
6.2.2	Método β de Newmark con aceleración lineal.....	141
6.2.3	Generalización del método β de Newmark	142
6.2.4	Evaluación final del método β de Newmark.....	142

Capítulo 7

Respuesta elástica en el dominio de la frecuencia.....	153
7.1 Transformada rápida de Fourier (FFT)	154
7.2 Función de transferencia de una estructura.....	158
7.3 Respuesta de la estructura en el dominio de la frecuencia	160
7.4 Respuesta de la estructura en el dominio del tiempo	161

Capítulo 8

Espectros	167
8.1 Espectros de respuesta	167
8.1.1 Construcción de un espectro de respuesta.....	167
8.1.2 Influencia del amortiguamiento en los espectros de respuesta	169
8.1.3 Relación entre los espectros de respuesta de desplazamiento, velocidad y aceleración.....	173
8.2 Espectros de amplitudes de Fourier.....	177
8.3 Espectros de diseño	184
8.3.1 Espectros de diseño de Colombia definidos por la NSR-98.....	185
8.3.2 Espectros de diseño de Colombia definidos por la NSR-10.....	191

Capítulo 9

Introducción a la instrumentación de estructuras	205
9.1 Instrumentación de estructuras	205
9.2 Equipos de medición	210

9.2.1 Equipos para medir aceleraciones	210
9.2.2 Equipos para medir desplazamientos.....	212
9.2.3 Equipos para medir deformaciones	213
9.3 Configuración instrumental.....	214
9.4 Reglamentación colombiana, NSR-10, Capítulo A.11.....	218
9.4.1 Aparatos de medición.....	218
9.4.2 Objetivos de la instrumentación	219
9.4.3 Localización de instrumentos dentro de la edificación..	219
9.4.4 Colocación de instrumentos sísmicos	220
9.5 Análisis de señales.....	221
9.5.1 Corrección de línea base.....	222
9.5.2 Escalar un sismo.....	224
9.5.3 Intensidad de Arias	225
9.5.4 Filtrar un sismo.....	226
9.5.5 Suavizado de una señal	231
9.5.6 Integración	232

Bibliografía	239
--------------------	-----

Índice de figuras

Figura 1.1	Representación del análisis estructural	17
Figura 1.2	Pirámide de Kukulcán (“El Castillo”), Chichen Itzá, México	19
Figura 1.3	Proyecto de una catedral gótica ideal según Eugene Emmanuel Viollet-le-Duc	20
Figura 1.4	Galileo Galilei e Isaac Newton: dos grandes precursores de la mecánica.....	23
Figura 1.5	Información que proporcionan los grados de libertad	25
Figura 1.6	Tipos de sistemas en función del número de grados de libertad	26
Figura 1.7	Ejemplo ilustrativo del principio de superposición.....	29
Figura 2.1	Diferentes representaciones de un sistema estructural.....	31
Figura 2.2	Representación de un sistema mediante resortes en serie.....	36
Figura 2.3	Representación de un sistema mediante resortes en paralelo.....	38
Figura 3.1	Dos formas de representar un modelo y un diagrama de cuerpo libre de un sistema con vibración libre no amortiguada.....	46
Figura 3.2	Valores típicos del período de vibración en edificios.....	48
Figura 3.3	Respuesta de una estructura con vibración libre no amortiguada.....	51
Figura 3.4	Transformación trigonométrica de la respuesta.....	52
Figura 3.5	Propiedades de la respuesta	52
Figura 3.6	Tiempos de desfase en función de las condiciones iniciales ...	53
Figura 4.1	Dos formas de representar un modelo y un diagrama de cuerpo libre de un sistema con vibración libre amortiguada.....	64
Figura 4.2	Respuesta de un sistema sometido a vibración libre con amortiguamiento crítico	68

Figura 4.3	Respuesta de un sistema sometido a vibración libre sobreamortiguado.....	70
Figura 4.4	Desplazamientos de un sistema sometido a vibración libre subamortiguado.....	72
Figura 4.5	Transformación trigonométrica de la respuesta.....	73
Figura 4.6	Respuesta de una estructura sometida a vibración libre amortiguada.....	80
Figura 5.1	Tipos de señales de excitación.....	89
Figura 5.2	Dos formas de representar un modelo y un diagrama de cuerpo libre de un sistema sometido a vibración forzada con excitación en la masa.....	90
Figura 5.3	Representación gráfica de la ecuación de equilibrio dinámico	92
Figura 5.4	Representación gráfica de la ecuación de equilibrio dinámico	97
Figura 5.5	Variación de la amplitud X en función de la relación de frecuencias β	102
Figura 5.6	Variación del ángulo de desfase ϕ en función de la relación de frecuencias β	105
Figura 5.7	Dos formas de representar un modelo y un diagrama de cuerpo libre de un sistema sometido a vibración forzada, con excitación en la base para determinar el movimiento relativo	106
Figura 5.8	Variación de la función de transferencia para desplazamiento relativo con la relación de frecuencias β	109
Figura 5.9	Dos formas de representar un modelo y un diagrama de cuerpo libre, de un sistema sometido a vibración forzada con excitación en la base para determinar el movimiento absoluto.....	110
Figura 5.10	Transformación trigonométrica de la respuesta.....	111
Figura 5.11	Variación de la función de transferencia para desplazamiento absoluto con la relación de frecuencias β	113
Figura 5.12	Respuesta de desplazamientos relativos y absolutos en función de la relación de frecuencias β , para una fracción de amortiguamiento ξ del 10%.....	115
Figura 5.13	Respuesta de desplazamientos relativos y absolutos en función de la relación de frecuencias ($\beta = 0.00, 0.80, 1.00, 1.50, 2.00$ y 5.00)	118
Figura 6.1	Acelerómetro digital	131

Figura 6.2	Archivo de datos del sismo de El Centro, 1940.....	132
Figura 6.3	Acelerograma del sismo de El Centro, 1940.....	133
Figura 6.4	Modelo y diagrama de cuerpo libre de un sistema sometido a una excitación en la base, para determinar el movimiento relativo.....	134
Figura 6.5	Descripción de la función de excitación.....	135
Figura 6.6	Hipótesis de aceleración uniforme	141
Figura 6.7	Hipótesis de aceleración lineal	141
Figura 7.1	Esquema de solución empleando el dominio de la frecuencia	154
Figura 7.2	Señal sísmica para transformar mediante la FFT	156
Figura 7.3	Señal sísmica transformada al dominio de la frecuencia	156
Figura 8.1	Concepto de espectro de respuesta.....	168
Figura 8.2	Espectros de respuesta del sismo de Michoacán, 1985	169
Figura 8.3	Relaciones entre los espectros de respuesta y los seudoespectros	175
Figura 8.4	Registro y espectros de respuesta del sismo de El Centro, 1940.....	176
Figura 8.5	Registro y espectros de respuesta del sismo de Kobe, 1985	176
Figura 8.6	Representación de una cantidad compleja	178
Figura 8.7	Procedimiento para evaluar un espectro de Fourier	178
Figura 8.8	Espectro de Fourier de la señal estudiada	179
Figura 8.9	Espectro elástico de aceleraciones de diseño definidos por la NSR-98.....	186
Figura 8.10	Valores de A_a definidos por la NSR-98	188
Figura 8.11	Descripción de los tipos de suelo definidos por la NSR-98	189
Figura 8.12	Valores de A_a y A_v definidos por la NSR-10	194
Figura 8.13	Valores de F_a para la zona de períodos cortos	197
Figura 8.14	Valores de F_v para la zona de períodos intermedios.....	198
Figura 8.15	Espectro elástico de aceleraciones de diseño definido por la NSR-10.....	201
Figura 8.16	Espectro elástico de velocidades de diseño definido por la NSR-10.....	202

Figura 8.17	Espectro elástico de aceleraciones de diseño definido por la NSR-10.....	203
Figura 9.1	Algoritmo para evaluar propiedades dinámicas.....	207
Figura 9.2	Acelerómetro digital	211
Figura 9.3	Transductor de desplazamiento (LVDT)	213
Figura 9.4	Medidor de deformación (<i>Strain Gages</i>)	214
Figura 9.5	Análisis del tiempo único de medición.....	215
Figura 9.6	Prototipo de instrumentación sísmica de edificios	217
Figura 9.7	Corrección de línea base en el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	223
Figura 9.8	Velocidad calculada a partir de un registro con o sin corrección de línea base, empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	223
Figura 9.9	Proceso para escalar un registro empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	224
Figura 9.10	Definición de la duración efectiva T_d	225
Figura 9.11	Cálculo de la intensidad de Arias empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	226
Figura 9.12	Funcionamiento básico de un filtro.....	227
Figura 9.13	Filtro digital pasa-baja.....	228
Figura 9.14	Filtro digital pasa-banda	228
Figura 9.15	Filtro digital pasa-alta	229
Figura 9.16	Filtro digital quita-banda.....	229
Figura 9.17	Definición del número de polos.....	230
Figura 9.18	Filtrado de una señal sísmica empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	230
Figura 9.19	Generación de funciones armónicas empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	231
Figura 9.20	Suavizado de una señal empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	232
Figura 9.21	Integración de una señal empleando el programa de cómputo Dinámica Estructural.....	232

Índice de tablas

Tabla 2.1	Valores de rigidez de sistemas estructurales	34
Tabla 5.1	Ecuación dinámica del movimiento para diferentes tipos de excitación armónica.....	107
Tabla 7.1	Número de puntos de la excitación requeridos para aplicar la FFT	155
Tabla 7.2	Resultado de la transformación de la señal sísmica empleando el método de la FFT	157
Tabla 8.1	Valores de A_a según el nivel de amenaza sísmica	187
Tabla 8.2	Valores del coeficiente de sitio S según el perfil de suelo.....	188
Tabla 8.3	Valores del factor de importancia I según el grupo de uso	191
Tabla 8.4	Valores de A_a y A_v según el nivel de amenaza sísmica	192
Tabla 8.5	Valores de A_a y A_v para las ciudades capitales de Colombia	193
Tabla 8.6	Clasificación de los perfiles de suelo.....	195
Tabla 8.7	Valores del coeficiente F_a para la zona de períodos cortos del espectro	196
Tabla 8.8	Valores del coeficiente F_v para la zona de períodos intermedios del espectro	197
Tabla 8.9	Valores del factor de importancia I según el grupo de uso	200

Presentación

Estas notas exponen los conceptos básicos de la Dinámica Estructural de Sistemas que son modelados mediante el empleo de un grado de libertad, desarrollados de forma didáctica para lograr una mejor comprensión. Abarcan, además, una revisión detallada del comportamiento de las estructuras cuando se someten a diferentes regímenes de vibración, comenzando por los casos más elementales, como son los de vibración libre, y finalizando con la evaluación de la respuesta de sistemas empleando equipos de instrumentación.

El programa de cómputo Dinámica Estructural (Botero Palacio, 2013)¹, desarrollado durante varios años, contiene las principales herramientas para el análisis de sistemas elásticos e inelásticos. Este programa de cómputo didáctico permitirá lograr una mejor comprensión de los temas desarrollados y posibilitará la realización de análisis más elaborados y detallados, con el fin de comparar resultados y establecer conclusiones propias respecto a los diferentes comportamientos dinámicos.

Dinámica de estructuras es el resultado de la experiencia adquirida desde los campos de la docencia y la práctica profesional. El autor agradece a la Universidad EAFIT y al doctor David Murià Vila y a los ingenieros Néstor Fredy Carvajal Monsalve y Roberto Rochel Awad sus valiosos y oportunos comentarios. De igual manera, reconoce la ayuda que le brindaron sus estudiantes de posgrado y pregrado, Tatiana Builes, Julián Salvá y especialmente Carolina García Arriola. Todos ellos hicieron posible que este trabajo fuera una realidad: mil gracias.

Juan Carlos Botero Palacio,
2010

¹ El programa de cómputo Dinámica Estructural fue desarrollada por el autor como soporte del curso de Análisis Dinámico. Puede ser descargado en: <http://dl.dropbox.com/u/1314525/Instalar306.exe>

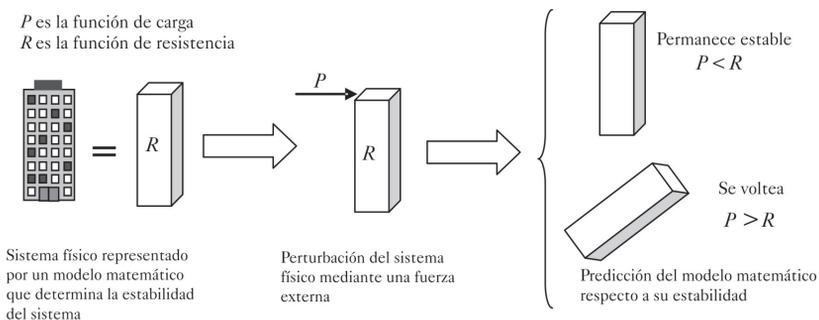
Capítulo 1

Introducción a la dinámica estructural

La mecánica de los materiales es una parte integral de la ingeniería aplicada que estudia las relaciones entre las perturbaciones inducidas a un sistema físico y la intensidad con que dicho sistema responde. Por tal motivo, el análisis estructural pretende establecer una predicción del comportamiento del sistema físico basado en un modelo matemático que representa las propiedades inherentes a dicho sistema. Sin embargo, no siempre es posible plantear modelos y soluciones matemáticas exactas, debido, entre otras circunstancias, a las variables que se inducen en la geometría del elemento, el comportamiento mecánico de sus materiales, la distribución de cargas aplicadas y la incertidumbre propia de la excitación.

Esto hace necesario el planteamiento de soluciones aproximadas, que se obtienen simplificando el problema mediante idealizaciones que pretenden obtener resultados aceptables que no afecten la seguridad y la economía del sistema físico. En la Figura 1.1 se ilustra el concepto de modelación y representación matemática de un determinado efecto, en este caso, el de la estabilidad.

Figura 1.1 Representación del análisis estructural*



* Las figuras que carecen de fuente fueron elaboración del autor.

En el campo del análisis estructural es posible estudiar el problema estático de un sistema físico considerando únicamente los efectos que se producen por los desplazamientos instantáneos generados por una perturbación. También es posible estudiar los efectos temporales de un sistema físico considerando las perturbaciones variables en el tiempo. El primer problema es resuelto mediante la mecánica de materiales denominada *estática* y el segundo mediante la *dinámica*.

La dinámica es la parte de la física mecánica que se encarga de describir las variaciones de posición en el tiempo de cualquier sistema físico flexible, generadas por alguna perturbación que altera su estado de reposo o movimiento. En el marco de esta definición, es posible establecer que el principal problema que la dinámica resuelve está relacionado con la descripción de las acciones que producen una perturbación del sistema físico y los efectos que se producen en éste, cuantificándolos mediante modelos y herramientas matemáticas.

Si un sistema físico es perturbado sin abandonar su entorno de estabilidad, es posible afirmar que dicho sistema tratará de volver a su posición de reposo, no sin antes realizar varias oscilaciones que consuman la energía del sistema mediante fuerzas internas de amortiguamiento. Estas oscilaciones o vibraciones mecánicas pueden ser descritas mediante funciones matemáticas que registran la historia, en el tiempo, de las principales variables cinemáticas del movimiento; éstas son: el *desplazamiento*, la *velocidad* y la *aceleración*.

Con base en lo anterior se puede establecer que la dinámica estructural se encarga de definir totalmente las historias en el tiempo de las variables cinemáticas que afectan los sistemas físicos flexibles. En forma complementaria también es posible que esta disciplina de estudio permita determinar la variación de esfuerzos, deformaciones, desplazamientos, cambios geométricos y demás efectos producidos por las cargas que actúan en ellas. El poder comprender cuáles son los valores límite que puede soportar una estructura antes de que se alcance su colapso es fundamental para entender su comportamiento y poder realizar diseños más seguros y económicos.

En la literatura reciente se han propuesto diversos métodos numéricos y analíticos que permiten establecer las historias de las variables cinemáticas, pilares fundamentales del análisis estructural moderno.

1.1 Antecedentes históricos

La historia de la humanidad muestra que la ingeniería estructural ha sido parte integral de la vida cotidiana. Prueba de ello son las grandes obras de la Edad Antigua, representativas de las culturas de los diferentes pueblos. Las pirámides de Egipto, la Gran Muralla China, Stonehenge, las pirámides mesoamericanas (Figura 1.2), el Partenón de Atenas, los acueductos romanos, son, entre otros, testigos mudos de la historia de la ingeniería estructural y de los deseos del hombre de construir obras que perpetúen su existencia.

Figura 1.2 Pirámide de Kukulkán (“El Castillo”), Chichen Itzá, México*



A mediados del siglo XII brotaron los primeros indicios de los que hoy conocemos como “ingenieros”, hombres que empezaron a aplicar los conceptos básicos adquiridos de la mecánica de los materiales al diseño y la construcción de estructuras. Las primeras estructuras se concibieron empleando un efecto racional de la concepción mecánica, que derivó en la aparición y aplicación de reglas empíricas basadas en las experiencias del

* Las fotografías que no llevan fuente al pie pertenecen al archivo del autor.

pasado. La Edad Media y el fortalecimiento de los estilos románico y gótico promovieron la concepción, el diseño y la construcción de monasterios y grandes catedrales (Figura 1.3), que en su estado actual evidencian su buen funcionamiento estructural.

Figura 1.3 Proyecto de una catedral gótica ideal según Eugene Emmanuel Viollet-le-Duc



Fuente: *arteHistoria*, disponible en: <http://www.artehistoria.jcyl.es/obrasmaestras/obras/16977.htm>, consulta: noviembre de 2010.

Bajo el manto oscuro de los alquimistas se dio un rápido desarrollo en las ciencias físicas, químicas y matemáticas. El Renacimiento impulsó la productividad con el perfeccionamiento de las máquinas. Sin embargo, el feudalismo y la carencia de una sociedad económicamente activa y progresista frustraron el uso de las máquinas en estos sistemas sociales.

A finales de la Edad Media se comenzaron a utilizar las máquinas en pequeños talleres caseros organizados por mercaderes urbanos y miembros de las monarquías que buscaban obtener dinero fácil. Sin embargo, los avances más relevantes en este período de la historia se dieron debido a

la proliferación de las guerras y el estímulo a la navegación como fuente importante para el desarrollo del comercio y los mercados.

En el siglo xv la minería promovió el uso de las bombas hidráulicas, que facilitaban las perforaciones profundas. Los avances en las armas de fuego, la pólvora, los barcos, los instrumentos de navegación, el reloj, la imprenta, los molinos de viento y la construcción de canales de irrigación animaron el pensamiento ingenieril provocando un fuerte impacto en el pensamiento filosófico. A partir del Renacimiento el reloj se convirtió en el modelo de la mecánica del universo.

Los avances en el estudio de la mecánica del movimiento fueron marcando el paso a los nuevos inventos de la época. Los nuevos estudios de la estática estaban basados en textos antiguos de mecánica teórica. En el siglo xv aparecieron nuevos textos sobre máquinas, con descripciones empíricas y, posteriormente, con estudios teóricos, como los escritos por Leonardo da Vinci; sus manuscritos describen los principios básicos y naturales de la mecánica.

Niccolò Fontana, *Tartaglia*, investigó sobre la construcción de relojes y la trayectoria de la parábola, descubierta por Galileo Galilei. La publicación de las ediciones latinas de Herón y Arquímedes estimuló esta clase de investigaciones, especialmente la que Commandino hizo de este último, aparecida en 1558, que puso el antiguo método de integración al alcance de los matemáticos. El mismo Commandino en 1565 aplicó estos métodos al cálculo de los centros de gravedad; este cómputo de los centros de gravedad siguió siendo el tema favorito de los sabios arquimedeanos, que usaron su estudio de la estática para obtener un conocimiento operativo de los rudimentos de lo que ahora conocemos como el cálculo. Sobresalientes entre los discípulos de Arquímedes fueron Simón Stevin, que en 1586 escribió sobre los centros de gravedad y la hidráulica; Luca Valerio, que entre 1604 y 1606 escribió sobre los centros de gravedad y la cuadratura de la parábola; y Paul Guldin, con su teorema sobre los centroides, ya expuesto por Pappo de Alejandría en el siglo iv.

A mediados del siglo xvii sobresalieron los trabajos de Galileo Galilei (1564-1642), el precursor de la teoría estructural. Su libro *Dos ciencias nuevas*, publicado en 1638, analiza la falla de algunas estructuras simples, incluyendo las vigas en voladizo. Galileo efectuó trabajos importantes en el campo de la dinámica, y realizó las primeras mediciones sobre cuerdas vibrantes –demostró que la altura tonal está relacionada con la frecuen-

cia de vibración–, estableció la mecánica de la caída libre y determinó la frecuencia de un péndulo –demostró que el período es independiente de la amplitud de la oscilación–. Es importante recordar que los primeros estudios sobre las alturas tonales producidas por la vibración de las cuerdas en función de su geometría fueron hechos por el filósofo y matemático griego Pitágoras en el siglo VI a. C.

Aun cuando los cálculos de Galileo no fueron exactos, su trabajo sentó un precedente para los desarrollos futuros de la teoría estructural, en la cual los principios analíticos de la mecánica y la resistencia de los materiales tienen una importante influencia en el diseño de las estructuras. A Galileo se le debe el espíritu de la ciencia moderna, basada en la interacción del experimento y la teoría, con énfasis en el uso intensivo de la matemática (Struik, 1994: 138).

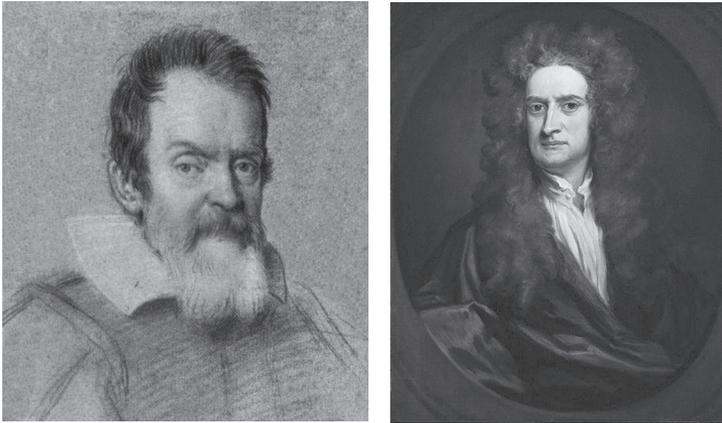
Después del trabajo precursor de Galileo, el conocimiento de la mecánica estructural avanzó notablemente a partir de la segunda mitad del siglo XVII y en el siglo XVIII. En estos años aparecen las investigaciones del científico inglés Robert Hooke (1635-1703) acerca de los resortes. En 1676 publicó el anagrama “ceiinossstuv” –latín *Ut Tensio sic Vis*: “La fuerza varía como el alargamiento”–. Esta ley de las relaciones lineales entre la fuerza y la deformación de los materiales es conocida como la *ley de Hooke*.

Posteriormente el inglés sir Isaac Newton (1642-1727), nacido en el mismo año de la muerte de Galileo, retomó los trabajos de este último, y formuló, a los veinticinco años, en su obra *Principia de Newton*, las leyes físicas que regulan el movimiento gravitacional. El tratado completo acerca de la teoría gravitacional, sin embargo, no apareció sino en 1687, titulado *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Siempre se ha especulado que Newton estableció su teoría reflexionando sobre la caída de una manzana; esto bien pudo haber sido una táctica para acallar a los científicos de su época, dada la incapacidad patológica de éstos para conceder algún mérito a los descubrimientos de otros científicos (Aydon, 2006: 64). En las propias palabras de Newton, él mismo fue capaz de llegar tan lejos porque se aupó sobre los hombros de gigantes y pudo sintetizar sus descubrimientos.

Newton hizo mucho más que investigar la fuerza de gravitación universal: fue capaz de demostrar matemáticamente la existencia de dicha fuerza y le dio forma a sus profundas conclusiones con argumentos tan sencillos que cualquier persona educada podía entenderlos. El poeta Alexander Pope resumió los logros de Newton en un poema que, aunque familiar, es difícil de mejorar por lo que se refiere a la descripción del

impacto que las leyes de Newton tuvieron en sus contemporáneos: “La naturaleza y sus leyes yacían escondidas en la oscuridad. / Dios dijo: ¡Que Newton sea!, / y todo se iluminó” (Aydon, 2006: 64).

Figura 1.4 Galileo Galilei e Isaac Newton:
dos grandes precursores de la mecánica



Fuente: “Galileo Galilei”, sitio web: *Wikipedia*, disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Galileo_by_leoni.jpg (Galileo Galilei), consulta: noviembre de 2010; e “Isaac Newton”, sitio web: *Wikipedia*, disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Sir_Isaac_Newton_by_Sir_Godfrey_Kneller_Bt.jpg (Isaac Newton), consulta: noviembre de 2010

Años más tarde aparecieron trabajos relevantes que han contribuido notablemente al desarrollo de la ingeniería estructural y en forma particular a la dinámica. Brook Taylor (1685-1731) estableció la frecuencia de una cuerda que vibra y desarrolló el teorema que lleva su nombre; John Bernoulli (1667-1748) formuló el principio del trabajo virtual; Leonhard Euler (1707-1783) desarrolló la teoría matemática del pandeo en las columnas, calculó la carga crítica de una columna, estableció el principio de la cantidad de movimiento angular, definió el número complejo y avanzó en el desarrollo de vibraciones en vigas y placas; Jean D’Alambert (1717-1783) estableció el principio de equilibrio dinámico que lleva su nombre; Charles Coulomb (1736-1806) presentó el análisis de la flexión de las vigas elásticas y definió las vibraciones torsionales y el concepto de fuerza de fricción.

A finales del siglo XVIII J. B. J. Fourier (1768-1830) realizó importantes trabajos que permitieron descomponer una señal arbitraria en series infinitas –que llevan su nombre–. Sus trabajos han sido pilares fundamentales

para el estudio de cualquier tipo de señales que puedan descomponerse en armónicos. L. M. Navier (1785-1836) publicó un tratado sobre el comportamiento elástico de las estructuras, considerado como el primer libro de texto sobre la teoría moderna de la resistencia de materiales.

El desarrollo de la mecánica estructural continuó avanzando rápidamente durante todo el siglo XIX. En 1877 apareció el libro *Teoría del sonido* de Lord Rayleigh (1842-1919), en el que se consignaron los avances matemáticos que hasta la fecha se tenían sobre el tópico de las vibraciones y los métodos energéticos. El científico británico James Clerk Maxwell (1831-1879) presentó el método de las deformaciones coherentes y la ley de las deflexiones recíprocas. En 1828, el científico francés S. D. Poisson formuló la relación entre las deformaciones unitarias transversales y longitudinales, conocida actualmente como el *coeficiente de Poisson*. Otto Mohr (1835-1918) desarrolló una brillante metodología para obtener la transformación de esfuerzos y deformaciones unitarias. Hardy Cross (1885-1959) desarrolló en 1924 el método de distribución de momentos; este método proporciona un procedimiento iterativo sencillo para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, fue usado con mayor frecuencia entre 1930 y 1970, y contribuyó significativamente a comprender el comportamiento de armazones estáticamente indeterminados.

El desarrollo de los computadores en la década de 1970 revolucionó notablemente el análisis estructural mediante la implementación de métodos numéricos capaces de resolver simultáneamente grandes sistemas de ecuaciones.

Actualmente los avances de la Dinámica Estructural están enfocados a comprender los efectos devastadores que se generan en una estructura por la ocurrencia de un terremoto, con el fin de reducir significativamente los niveles de los daños estructurales aprovechando los nuevos desarrollos tecnológicos. Los lineamientos futuros estarán relacionados con la búsqueda de sistemas que permitan aprovechar las condiciones dinámicas de un sistema cualquiera para minimizar o reducir significativamente los daños estructurales sin un incremento significativo de los costos. Esto podrá ser una realidad si se avanza en la investigación usando el ingenio y conociendo la ruta de lo que se pretende alcanzar y los consecuentes beneficios sociales que se pueden lograr.

1.2 Conceptos fundamentales utilizados en la dinámica

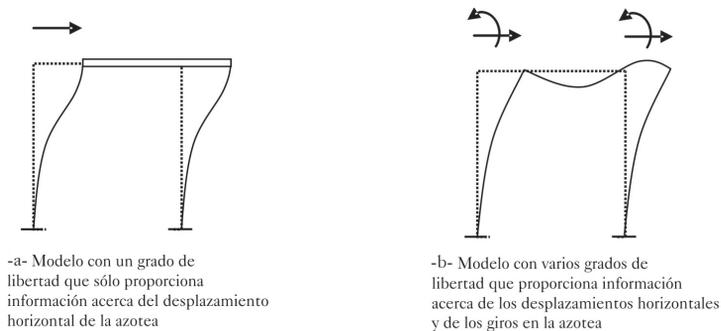
La dinámica se encuentra dividida en dos grandes campos: la *cinemática* y la *cinética*. La cinemática permite describir el movimiento de un cuerpo mediante el empleo de funciones matemáticas, que definen su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante de tiempo. La cinética es la encargada de ilustrar las leyes físicas que actúan sobre un cuerpo en movimiento.

Cuando se desea establecer los diferentes valores que pueden tomar las variables cinemáticas en el tiempo, es necesario determinar un marco de referencia que permita relacionar en forma coherente dichas variables. Este sistema de referencia se puede definir mediante el concepto de *grados de libertad*.

Los grados de libertad corresponden al número mínimo de coordenadas independientes necesarias sobre las cuales se van a medir las variables cinemáticas en cualquier instante de tiempo, con el fin de obtener la información que permita hacer análisis congruentes y consistentes de lo que se pretende analizar.

En la Figura 1.5 se muestra un modelo de un sistema aporricado de un nivel. En el primer caso -a-, sólo interesa conocer el desplazamiento lateral del sistema, asumiendo elementos con rigidez axial infinita (no sufren alargamientos o acortamientos) y la viga con rigidez a flexión infinita (no se producen giros). Para este caso se podría considerar un grado de libertad en el nivel superior del pórtico que nos brinde la información requerida. Si se quisiera tomar en cuenta la rotación de la viga y su posible acortamiento por efectos axiales, sería necesario adicionar tres grados de libertad, tal como se ilustra en el caso -b-.

Figura 1.5 Información que proporcionan los grados de libertad



El caso más sencillo de un análisis dinámico consiste en colocar un grado de libertad en un punto donde se pueda concentrar toda la masa del sistema, que bien podría ser su centro de masa. Este caso de estudio se conoce como *sistemas de un grado de libertad* (Figura 1.6 -a-). Cuando se desea obtener información de varios puntos, se deben colocar grados de libertad en ellos; este caso de estudio se conoce como *sistemas de varios grados de libertad* (Figura 1.6 -b-).

Figura 1.6 Tipos de sistemas en función del número de grados de libertad



Además de los casos anteriores, es posible establecer *sistemas con infinitos grados de libertad*, para los cuales es posible establecer modelos que describen el efecto que se va a estudiar mediante el planteamiento de funciones matemáticas continuas. Este caso es estudiado por la mecánica del medio continuo.

Una vez que se han definido claramente los grados de libertad, se deben definir las variables cinemáticas que se desean reportar en el sistema físico. Estas variables son las siguientes:

- Desplazamiento

Este concepto mide la longitud que describe el cambio de posición de un cuerpo, producto de su movimiento de un punto a otro, y se puede determinar mediante la variable x .

- Velocidad

Describe la relación entre el espacio recorrido por un cuerpo y el tiempo empleado para hacerlo. Esta variable se relaciona mediante la expresión $\dot{x} = dx/dt$.

- **Aceleración**

Describe el cambio de velocidad de un cuerpo cuando se mueve de un lado a otro. Esta variable se relaciona mediante la expresión

$$\ddot{x} = d\dot{x}/dt = d^2x/dt^2.$$

1.3 Hipótesis del análisis estructural

Los análisis teóricos y los resultados experimentales desempeñan papeles igualmente importantes en la mecánica de materiales. A menudo se usan teorías para obtener fórmulas y ecuaciones que predicen el comportamiento mecánico; sin embargo, esas expresiones no pueden usarse en el diseño práctico a menos que se conozcan las propiedades físicas de los materiales. Se dispone de tales propiedades sólo después de llevar a cabo cuidadosos experimentos en los laboratorios. Además, muchos problemas prácticos no pueden ser analizables sólo con la teoría: se necesitan las pruebas físicas.

Por eso, para estudiar el comportamiento estructural de algún sistema es necesario plantear las hipótesis bajo las cuales es válida la aplicación de ciertas teorías. Estas hipótesis son simplificaciones que se realizan en ciertas estructuras con el fin de reducir el grado de complejidad analítico del sistema sin perder la calidad en la respuesta estructural.

Las hipótesis básicas que se asumen en el presente texto son las siguientes:

- Los materiales constitutivos de los elementos estructurales son continuos, es decir, se pueden aplicar todos los conceptos básicos definidos en la mecánica del medio continuo. Se pueden establecer funciones matemáticas continuas que permiten representar un determinado efecto.
- Los materiales que conforman los elementos estructurales se consideran homogéneos, es decir, tienen las mismas características físicas y químicas en todas sus partes, por pequeñas que éstas sean.
- Los elementos estructurales se consideran isotrópicos, lo que implica que las propiedades físicas son iguales en cualquier dirección, por lo que no presenta una dependencia de la orientación angular original.

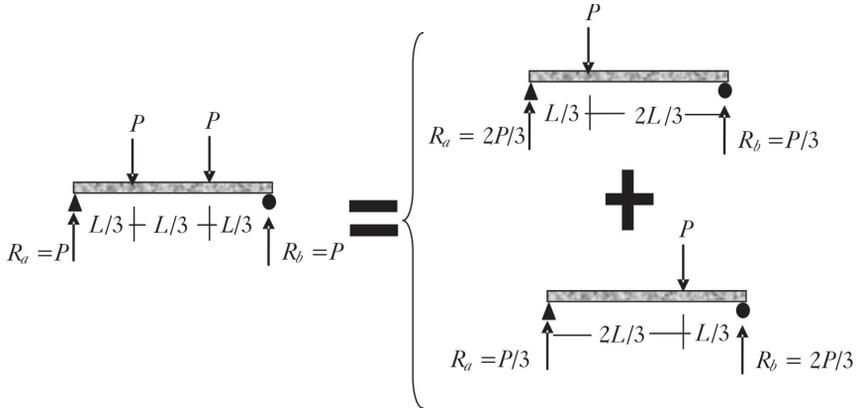
- Los materiales se consideran elásticos. Esto significa que la trayectoria de carga de una estructura es exactamente la misma que la de descarga.
- Los materiales se consideran lineales. Esto significa que el rango de aplicación de las teorías estructurales está definido por el límite de proporcionalidad y la trayectoria de carga es lineal. En este rango es aplicable la ley de Hooke. Es importante mencionar que todo material lineal es elástico, pero no todo material elástico es lineal.
- Las secciones que son planas antes de sufrir deformaciones, permanecen planas luego de que se aplican las cargas.
- Se asume que los desplazamientos de las estructuras están dentro del campo de las deformaciones pequeñas.

En la teoría del análisis estructural se emplea el conocido *principio de superposición*, que permite evaluar el desplazamiento o esfuerzo total en un punto de una estructura sometida a varias cargas como la suma de los desplazamientos o esfuerzos que ocasiona cada una de las cargas que actúan por separado.

Para poder aplicar el principio de superposición se debe cumplir que el material estructural sea elástico—de manera que permita la aplicación de la ley de Hooke— y la carga sea proporcional al desplazamiento. También se debe cumplir que la geometría de la estructura no sufra cambios importantes cuando se aplican las cargas; esto significa que las deformaciones de la estructura deben ser tan pequeñas, que las ecuaciones de equilibrio se puedan basar en la configuración geométrica no deformada. Las estructuras que satisfacen estas dos condiciones se conocen como *sistemas elásticos lineales*. En general, las estructuras en ingeniería se diseñan de tal modo que, bajo cargas de servicio, sufran deformaciones pequeñas con esfuerzos dentro de las partes lineales de las curvas esfuerzo-deformación de sus materiales. Por lo tanto, bajo cargas de servicio, los tipos más comunes de estructuras se pueden clasificar como *elásticas lineales*, y es válido aplicar el principio de superposición.

En la Figura 1.7 se ilustra un ejemplo sencillo en donde se puede aplicar el principio de superposición para el cálculo de las reacciones en los apoyos.

Figura 1.7 Ejemplo ilustrativo del principio de superposición



La utilidad más importante de este principio radica en la posibilidad de resolver un problema elástico lineal dividiéndolo en varios problemas independientes para los cuales se conoce su solución. El resultado final será la suma de todas las soluciones independientes que conforman el problema inicialmente planteado.

Es importante mencionar que cuando se cuenta con materiales o efectos contrarios a los asumidos en las hipótesis anteriores, es necesario revisar cuidadosamente las implicaciones en las teorías propuestas con el fin de poder determinar su verdadera influencia.

