Álgebra lineal

Orlando García Jaimes
Jairo A. Villegas Gutiérrez
Jorge Iván Castaño Bedoya

15
FONDO
EDITORIAL
UNIVERSIDAD
EAFIT

García Jaimes, Orlando
Álgebra lineal / Orlando García Jaimes, Jairo Alberto Villegas Gutiérrez, Jorge Iván Castaño Bedoya. -- Medellín : Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2012.
520 p. ; 24 cm. -- (Colección académica)
ISBN 978-958-720-142-0
1.Algebras lineales. 2. Matrices (Matemáticas). 3. Espacios vectoriales.
I. Villegas Gutiérrez, Jairo Alberto. II. Castaño Bedoya, Jorge Iván. III. Tít. IV. Serie
512.5 cd 21 ed.
G216
Universidad EAFIT-Centro Cultural Biblioteca Luis Echavarría Villegas

Álgebra lineal

Segunda reimpresión: febrero de 2015
© Orlando García Jaimes
© Jairo A. Villegas Gutiérrez
© Jorge Iván Castaño Bedoya
© Fondo Editorial Universidad EAFIT
Cra. 48A No. 10 sur - 107. Tel. 261 95 23
www.eafit.edu.co/fondoeditorial
Correo electrónico: fonedit@eafit.edu.co

ISBN: 978-958-720-142-0

Imagen de carátula: *Epcot Polygons*, subido por: turbidity,
disponible en: www.sxc.hu, consulta: 7 de noviembre del 2012

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la editorial.

Editado en Medellín, Colombia

Contenido

1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales **11**
- 1.1. Introducción 11
- 1.2. Matrices 14
  - 1.2.1. Algunos tipos de matrices 15
- 1.3. Operaciones con matrices 17
- 1.4. Multiplicación de matrices 21
- 1.5. Transpuesta de una matriz 26
- 1.6. Sistemas de ecuaciones lineales 34
- 1.7. Forma matricial de un sistema 36
- 1.8. Sistemas equivalentes 38
- 1.9. Matrices invertibles 60
- 1.10. Ejercicios resueltos 75
- 1.11. Ejercicios propuestos capítulo 1 91

2. Determinantes **101**
- 2.1. Introducción 101
- 2.2. Determinante de una matriz 102
- 2.3. Propiedades de los determinantes 108
- 2.4. Cálculo de determinantes por cofactores 122
- 2.5. Adjuntas e inversas 126
- 2.6. Regla de Cramer 130
- 2.7. Ejercicios resueltos 133
- 2.8. Ejercicios propuestos capítulo 2 152

3. Espacios vectoriales **159**
- 3.1. Introducción 159

3.3. Subespacios vectoriales 174
3.4. Bases de un espacio vectorial 182
3.5. Dimensión de un espacio vectorial 192
3.6. Ejercicios resueltos 202
3.7. Ejercicios propuestos capítulo 3 221

4. Producto escalar **225**
4.1. Introducción 225
4.2. Producto escalar 226
4.3. Proyección ortogonal 242
4.4. Producto escalar respecto a una base 249
4.5. Lugares geométricos 254
4.5.1. Rectas en el plano 254
4.5.2. Ángulo entre dos rectas 255
4.5.3. Planos 258
4.5.4. Circunferencia y superficie esférica 262
4.5.5. Intersección entre circunferencia y recta . . . 267
4.5.6. Superficie cónica 270
4.6. Cálculo de distancias 272
4.6.1. Distancia de un punto a una recta 273
4.6.2. Distancia de un punto a un plano 276
4.7. Bases ortonormales 282
4.8. Ejercicios propuestos capítulo 4 290

5. Producto vectorial **295**
5.1. Introducción 295
5.2. Producto vectorial 296
5.3. Aplicaciones del producto vectorial 308
5.3.1. Ecuación del plano 308
5.3.2. Distancia entre dos rectas 311
5.3.3. Área de un triángulo 317
5.4. Triple producto escalar 322
5.5. Momento producido por una fuerza 327
5.6. Ejercicios propuestos capítulo 5 341

6.1. Introducción 345
6.2. Transformaciones lineales 346
6.3. Propiedades de las transformaciones lineales 354
6.4. Rango y núcleo 360
6.5. Transformaciones lineales inyectivas 364
6.6. Isomorfismos 370
6.7. Forma matricial de una transformación lineal 374
6.8. Cambio de coordenadas 379
6.9. Matriz que representa una transformación 382
6.10. Álgebra de las transformaciones lineales 386
6.11. Transformaciones lineales invertibles 393
6.12. Ejercicios resueltos 399
6.13. Ejercicios propuestos capítulo 6 416

7. Valores y vectores propios **421**
7.1. Introducción 421
7.2. Valores y vectores propios de una matriz 422
7.3. Diagonalización 435
7.4. Diagonalización de matrices simétricas 443
7.5. Formas cuadráticas 461
7.5.1. Ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 471
7.6. Ejercicios propuestos capítulo 7 488

A. Respuesta de los ejercicios seleccionados **493**
A.1. Ejercicios propuestos capítulo 1, página 91 493
A.2. Ejercicios propuestos capítulo 2, página 152 497
A.3. Ejercicios propuestos capítulo 3, página 221 499
A.4. Ejercicios propuestos capítulo 4, página 290 501
A.5. Ejercicios propuestos capítulo 5, página 341 503
A.6. Ejercicios propuestos capítulo 6, página 416 505
A.7. Ejercicios propuestos capítulo 7, página 488 506

Bibliografía **509**

Índice alfabético **511**

Índice de figuras

1.1. Introducción de matrices con DERIVE 30
1.2. Pantalla para matrices 2×3 con DERIVE 31
1.3. Pantalla para insertar el número de ecuaciones en DERIVE 46
1.4. Pantalla para introducir ecuaciones en DERIVE . . . 47

2.1. Inversiones de una permutación ($n = 6$) 105
2.2. Cálculo de $\det A$, si A es de tamaño 3×3 107
2.3. Cálculo de los cofactores de una matriz 148
2.4. Cálculo de la adjunta de una matriz 149
2.5. Área del triángulo con vértices en A, B y C 150

3.1. Combinación lineal de los vectores $(1, -1)$ y $(1, 2)$. 177
3.2. Combinación lineal de dos vectores 178
3.3. Subespacio generado por el vector $(3, 4)$ 179
3.4. Bases para $\mathbb{R}^2$ 189
3.5. Tres vectores libres determinan una base para $\mathbb{R}^3$. 202

4.1. Prueba del axioma $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ para el producto escalar 238
4.2. Ley distributiva para el producto escalar 239
4.3. Teorema del coseno 241
4.4. Teorema de Pitágoras 241
4.5. Paralelogramo con diagonales ortogonales 242
4.6. Proyección ortogonal 243
4.7. Diagonales de un rombo 245
4.8. Ángulo inscrito en media circunferencia 246

4.10. Ángulo de la diagonal de un cubo 252
4.11. Cosenos directores de un vector 254
4.12. Ecuación de una recta en el plano 255
4.13. Ángulo entre dos rectas de un mismo plano 257
4.14. Plano normal al vector $\vec{n}$ y que pasa por A 258
4.15. Ángulo entre dos planos 260
4.16. Superficie esférica de radio ρ y centro C 263
4.17. Tangentes a una circunferencia 264
4.18. Intersección entre una circunferencia y una recta . . 267
4.19. Intersección de una recta y una circunferencia . . . 270
4.20. Superficie cónica 271
4.21. Distancia de un punto a una recta 273
4.22. Área de un triángulo cualquiera 275
4.23. Distancia del punto P_0 al plano Π 276
4.24. Proceso de Gram-Schmidt 287
4.25. Vector ortogonal a otros dos 288

5.1. Sentidos positivo y negativo del producto vectorial . 297
5.2. Invarianza del producto vectorial 298
5.3. Distributividad para vectores en el mismo plano . . 299
5.4. Distributividad para $\mathbf{v_1}$ perpendicular a $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3}$ . . 300
5.5. Ley distributiva, caso general 301
5.6. Plano que pasa por un punto A y es paralelo a dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ 309
5.7. Distancia entre rectas cruzadas en el espacio 315
5.8. Área de un triángulo 317
5.9. Área de una poligonal convexa 319
5.10. Área del polígono convexo del ejercicio 5.3.5 321
5.11. Determinante de un matriz 3×3 324
5.12. Volumen del paralelepípedo 325
5.13. Fuerzas equivalentes 328
5.14. Momento de una fuerza 328
5.15. Momento de una fuerza respecto al origen 329
5.16. Momento respecto a un punto arbitrario 330
5.17. Teorema de Varignon 332

5.19. Área de la región poligonal convexa 342

6.1. Rotación del punto $v = (x, y)$ un ángulo θ 348
6.2. Rotación de $u + v$ un ángulo θ 349
6.3. Rotación de αv un ángulo θ 350
6.4. Rotación de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ un ángulo θ . 350
6.5. Reflexión del vector (x, y) alrededor de $y = x$ 352
6.6. Composición de isomorfismos 373

7.1. Efecto del cambio de base en una transformación . 449
7.2. Efecto del cambio de base en un endomorfismo . . . 450
7.3. Cambio de base en un endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ 452
7.4. Gráfica de la sección cónica del ejercicio 7.5.3 . . . 477
7.5. Gráfica de la sección cónica del ejercicio 7.5.4 . . . 479
7.6. Gráfica de la sección cónica del ejercicio 7.5.5 . . . 480

Índice de tablas

1.1. Pesos de las materias por departamento 21
1.2. Calificaciones por aspirante 22

2.1. Determinante de una matriz 3×3 107
2.2. Determinante de la matriz A dada 108

5.1. Área de una poligonal convexa 321
5.2. Área del polígono convexo del ejercicio 5.3.5 322

6.1. Datos del ejemplo 6.3.2 358
6.2. Cantidades de material por tipo de parte 359

7.1. Clasificación de las cónicas según su inercia 474
7.2. Clasificación de las superficies cuadráticas por su inercia 483
7.3. Ecuaciones canónicas de las superficies cuadráticas 485

Capítulo 1

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1.1 Introducción

Desde el punto de vista lógico, un curso de Álgebra Lineal debería iniciarse con el concepto de *espacio vectorial*, presentar luego las transformaciones lineales entre espacios vectoriales y la cuestión de las matrices, y a partir de esto atacar el problema de los sistemas de ecuaciones. Sin embargo, desde el punto de vista pedagógico, resulta más productivo introducir al estudiante en los conceptos del Álgebra Lineal comenzando con los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, con los cuales él ya está un poco más familiarizado.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, las matrices constituyen una poderosa herramienta para la formulación de algoritmos de solución. Además, ellas nos permiten expresar de forma simple gran variedad de problemas relacionados con procesos de información, introducción de sistemas lineales en un computador, etc. En el campo del álgebra lineal y sus temas afines, las matrices constituyen una herramienta fundamental.

Históricamente, la referencia a problemas algebraicos aparece en épocas muy remotas. Ya en las civilizaciones de la antigua

escritura cuneiforme.

Mejor suerte se ha tenido con los antiguos documentos egipcios, puesto que el descubrimiento de la piedra trilingüe de Roseta (griego, demótico y jeroglífico) en 1779, en el transcurso de una de las expediciones napoleónicas, ha permitido descifrar gran parte de documentos e inscripciones egipcias. Uno de los más importantes, con carácter matemático, que se ha encontrado es el denominado papiro Rhind o papiro de Ahmes. Este es un rollo de papiro de 30 cm de ancho por 6 m de largo, que fue comprado en 1858 por el coleccionista de antigüedades escocés Henry Rhind. Ahmes, el escriba que transcribió originalmente el papiro alrededor del 1650 a. C., explica que el material es una copia de otro manuscrito que data de entre los años 2000 y 1800 a. C. y que es muy probable que sean conocimientos que provengan de Imhotep, arquitecto y médico del faraón Zoser.

En el papiro Rhind hallamos una gran variedad de problemas matemáticos, que van desde representaciones para los números hasta problemas geométricos y de razones trigonométricas. En el caso del álgebra, aparecen problemas en los cuales se plantea la solución de una ecuación lineal de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. Es necesario aclarar que ellos no emplearon este tipo de escritura; para representar las incógnitas usaban la expresión "aha" o montón, y con esta terminología nos encontramos con problemas como este: "Calcular el montón si el montón y un séptimo del montón son 19".

Por otro lado, los chinos también se plantearon el problema de resolver sistemas lineales. En el texto *Nueve capítulos de arte matemático*, escrito durante la dinastía Han alrededor de los años 200 a. C., nos encontramos con el siguiente problema: "Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?".

Usando la notación actual para las ecuaciones, tenemos un

escribirse en la forma

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

En cuanto a la solución, lo que se propone es escribir las ecuaciones en un tablero de la forma

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Para resolver el sistema de ecuaciones, el autor de los *Nueve capítulos de arte matemático* explica el procedimiento en los siguientes términos:

1. Multiplique la columna dos por tres y la columna tres por dos; reste la nueva columna tres a la columna dos, generando una nueva columna dos. Luego, multiplique la columna uno por tres y quítele la columna tres, generando una nueva columna uno. De esta forma se obtiene el siguiente tablero:

0	2	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

2. Multiplique la columna uno por cinco y la columna dos por cuatro; reste la nueva columna dos a la columna uno, obteniendo una nueva columna uno. El tablero quedará finalmente de la siguiente forma:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

z. Usando este valor y la segunda columna se puede calcular y. Por último, con estos valores y la ecuación correspondiente a la tercera columna, se puede determinar el valor de x. Este procedimiento constituye un antecesor chino del método de eliminación de Gauss.

Entre los métodos que se conocen para resolver sistemas de ecuaciones lineales, es curioso que lo que hoy conocemos como método de Cramer para un sistema de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

fuese presentado por primera vez en la forma

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad y = \frac{af - dc}{ae - bd}$$

por Colin Maclaurin en 1729, en el texto *Treatise of Algebra,* que se pretendía fuese una introducción al libro de Isaac Newton *Arithmetica universalis.* El libro de Colin Maclaurin se publico en el año 1748, dos años antes de que viera la luz el texto de Gabriel Cramer sobre líneas algebraicas, en el que aparecen las mencionadas fórmulas (Boyer, 2001: 540-542).

1.2 Matrices

Definición 1.2.1. *Una matriz A es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, distribuidos en m filas y n columnas, y que denotamos con $A = (a_{ij})_{m \times n}$.*

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

En este caso decimos que A es una matriz de orden $m \times n$.